Exercice 1 (4 points)

1. On a $\ln(x^2 + x) = \ln(x(x + 1)) = \ln(x) + \ln(x + 1)$ (x étant positif).
2. La valeur après trois ans est $850 \times 0{,}8^3 = 435{,}20$€.
3.

   3. 1. Le pourcentage d'augmentation est $\dfrac{6\ 800 - 2\ 000}{2\ 000} \times 100 = 240\%$.

   3. 2. Le taux annuel moyen étant $\sqrt{1 + \dfrac{240}{100}} - 1 \simeq 0{,}8439$, La meilleure approximation du taux d'évolution annuel moyen est $84{,}39\%$.
   Les taux étant grands, aucune autre approximation n'est valable !

Exercice 2 (6 points)
Partie A

1. L'équation $f(x) = 0$ a 2 solution (on ne demande pas lesquelles !).
2. L'équation $f'(x) = 0$ a pour solution $\mathcal{S} = \{2\}$ (là où il y a une tangente horizontale).
3. $f'(1) = \dfrac{-2}{1} = -2$.

Partie B

1. $f'(x) = 2 - 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x - 4}{x} = \dfrac{2(x - 2)}{x}$.
2. Puisque l'on admet que f est décroissante sur $]0; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$. On fait le tableau de variations en conséquence, sans oublier la double barre en 0 (où la fonction n'est pas définie) et d'ajouter $f(2) = 2 - 4\ln(2)$. Cette valeur est la valeur exacte du minimum.
   Un encadrement de α à 10^{-2} près est : $3{,}51 < \alpha < 3{,}52$ (on utilise pour cela la calculatrice).

Partie C

1. Soit $k : x \mapsto x\ln(x)$. La fonction k est de la forme uv avec
   $$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \ln(x)$$
   Donc
   $$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$
   par conséquent $k'(x) = (u'v + uv')(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.
   Par suite, $C'(x) = 2x + 2 - 4 \times k'(x)$, soit :
   $C'(x) = 2x + 2 - 4(\ln(x) + 1) = 2x + 2 - 4\ln(x) - 4 = 2x - 2 - 4\ln(x)$.
   À savoir faire ! Un « - » dans l'énoncé n'est pas à remplacer par un « + » dans sa copie !
2. On veut le signe de $C'(x)$ sur $[1\ ;\ 6]$. On observe que $C'(x) = f(x)$. Or d'après la partie B, étant données les variations de la fonction f et le fait que $f(1) = 0$, on en déduit que : $C'(x)$ (c'est à dire $f(x)$) est négative sur $[1; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; 6]$.
3. Puisque l'on admet que C est décroissante sur $[1; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; 6]$ (ce qui est immédiat d'après la question précédente), on peut établir le tableau de variations de C, sans oublier les valeurs :
   $$C(1) = 3 \quad C(\alpha) \simeq C(3{,}51) \simeq 1{,}71 \quad C(6) \simeq 5$$
4. Compte tenu des **unités**, le coût de production est minimal pour 351 boîtiers.

Exercice 3 (4 points)

1. On a $C_1 = 3\,000 \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) + 50 = 3\,000 \times 1{,}03 + 50 = 3\,140$.
2. De même, $C_2 = 3\,140 \times 1{,}03 + 50 = 3\,284{,}20$.
3. Le capital d'une année se calcule à partir de celui de l'année précédente. On multiplie par le coefficient multiplicateur associé au taux de 3% et on ajoute 50. Soit, à l'image des calculs pour C_1 et C_2 : $C_{n+1} = 1{,}03C_n + 50$.
4. (a) La formule est : « = B5*(1+$B$1/100)+$B$2 ». Il faut bloquer les cellules B1 et B2 et au contraire laisser B5 tel quel (éventuellement on peut utiliser $B5) pour pouvoir étirer la formule vers le bas.

   (b) Pas de formule ici en STG pour avoir le capital au bout de 4 années de placement.
   Il faut calculer C_3 puis C_4.
   $C_3 = 3\,284{,}20 \times 1{,}03 + 50 = 3432{,}726$,
   puis $C_4 = 3432{,}726 \times 1{,}03 + 50 \simeq 3585{,}70$ (troncature au centième).

Exercice 4 (6 points)

1. Le nuage de points doit être fait avec le plus de précision possible.
2. Pour tracer la droite avec le plus de précision possible, choisir deux points éloignés. Par exemple le point de l'axe des ordonnées (pour $x = 0$, $y = 8400$), puis un autre pour une valeur de x plus « grande » (cela dépend des unités). Par exemple pour $x = 10$, $y = 8400 - 5800 = 2600$.
3. Pour déterminer le nombre de tués prévus en 2010, on considère que le rang x associé est 10. On utilise ensuite soit une lecture graphique (faire les traits !), soit un calcul avec l'équation de droite. Nous l'avons justement fait à la question précédente. Le nombre de tués prévus en 2010 est donc 2 600.

Partie B :

1. (a) On a immédiatement $f'(x) = -\dfrac{1\,900}{x}$.
   (attention à connaître la dérivée de ln !)

   (b) Dès que $x > 1$, donc x positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-1\,900$, donc $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

Partie C :

On calcule dans les deux modèles le nombre de tués prévus.
Dans le cas du modèle de la partie A on trouve $8400 - 580 \times 15 = -300$, soit un nombre de tués négatif !
Dans le cas du modèle de la partie B on trouve $-1900\ln(x) + 8400 \simeq 3255$ à l'unité près, donc une valeur beaucoup plus crédible !
Contrairement au modèle de la partie A, le modèle B ne donne pas de valeurs entières (on parle de nombre de personnes !), mais elles sont beaucoup plus crédibles sur le long terme en les arrondissant à l'unité.