

DEVOIR DE TYPE BAC

17 avril 2013

MATHÉMATIQUES

Série STG

C.F.E.

Durée de l'épreuve : 3 heures

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte
pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.**

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (4 points)

Selon l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) un indice des prix a suivi, en France, l'évolution suivante entre les années 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	101,5	102,8	104,0	107,1	109,4	113,5

INSEE : formation brute de capital fixe

L'exercice a pour objet d'étudier l'évolution de cet indice en utilisant deux modèles mathématiques.

Une représentation graphique du nuage de points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$ est donnée en annexe 1, à rendre avec la copie.

1. Ajustement affine

(a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

(b) À partir des calculs effectués ci-dessus, on retient comme ajustement affine du nuage de points la droite d'équation $y = 2,2x + 96,8$.

Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe 1, à rendre avec la copie.

(c) En supposant que ce modèle reste valable pour l'année 2007, donner une prévision de la valeur de l'indice pour 2007. Indiquer la méthode utilisée.

2. Ajustement à l'aide d'un logiciel Un logiciel de calcul propose d'ajuster le nuage de points à l'aide d'une partie de la courbe d'équation $y = 0,3x^2 + 0,1x + 99,9$.

La courbe C est tracée en annexe 1, à rendre avec la copie.

(a) Déterminer l'ordonnée du point de la courbe C d'abscisse 8.

(b) On suppose que le modèle défini par la courbe C reste valable pour l'année 2007.

Donner, selon ce modèle, la valeur de l'indice pour 2007.

Exercice 2 (5 points)

L'extrait de feuille de calcul ci-dessous donne partiellement le nombre de SMS* interpersonnels émis par téléphone en France lors des années 2001 à 2007. Le format d'affichage sur la plage de cellules B3 :H3 est un format numérique à zéro décimale.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2	Nombre de SMS interpersonnels (en millions)	3 234	5 877	8 410		12 712	15 023	17 546
3	Indice	100	182	260	335		465	543

Source ARCEP Volumes de la messagerie interpersonnelle

1. (a) Calculer le nombre de millions de SMS interpersonnels émis au cours de l'année 2004 (arrondir à l'unité).

(b) Calculer l'indice de l'année 2005 (arrondir à l'unité).

2. Donner une formule qui, entrée dans la cellule C3, permet par recopie vers la droite d'obtenir la plage de cellules C3 :H3.

3. Dans cette question les résultats seront arrondis à 1 %.

(a) Donner le taux d'évolution du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2003.

(b) Calculer le taux d'évolution moyen annuel du nombre de SMS interpersonnels émis de l'année 2001 à l'année 2003.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 - 4 \ln(x)$.

1. Montrer que : $f'(x) = \frac{2(x-2)}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire le tableau de variation de f . On indiquera la valeur exacte du minimum.
On notera α la solution de l'équation $f(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[3 ; +\infty[$.
Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près puis à 10^{-3} près.

Partie B

Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$ par $C(x) = x^2 + 2x - 4x \ln(x)$.

Une entreprise fabrique des boîtiers de télécommande plastiques. Lorsque l'entreprise fabrique x milliers de boîtiers par jour, le coût moyen de production d'un boîtier est égal à $C(x)$ (x est compris entre 1 millier et 6 milliers). Le coût moyen est exprimé en euros.

1. Montrer que $C'(x) = 2x - 2 - 4 \ln(x)$ où C' désigne la fonction dérivée de C sur $[1 ; 6]$.
2. À l'aide de l'étude faite dans la partie A, déterminer le signe de $C'(x)$ sur $[1 ; 6]$ puis établir le tableau de variation de C sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
3. En déduire le nombre de boîtiers à produire par jour pour que le coût de production d'un boîtier soit minimum. On donnera une valeur approchée du résultat à un boîtier près.

Exercice 4 (6 points) Un fabricant de vélos fabrique deux types de cadres : le cadre de type TU et le cadre de type TR. Pour cela, il utilise trois machines : la machine A pour assembler les tubes, la machine P pour les polir et les peindre, la machine M pour monter les suspensions.

Pour fabriquer un lot de 100 cadres,

de type TU, il utilise 1 heure la machine A, 3 heures la machine P et n'utilise pas la machine M,

de type TR, il utilise 2 heures la machine A, 1 heure la machine P et 2 heures la machine M.

Il dispose de 60 h d'utilisation par semaine pour la machine A, 90 h pour la machine P, et 42 h pour la machine M.

L'objectif de cet exercice est de trouver comment le fabricant doit utiliser ses machines dans la limite du temps imparti pour réaliser un bénéfice maximum.

On note x le nombre de lots de 100 cadres de type TU, et y le nombre de lots de 100 cadres de type TR.

On admet que les contraintes se traduisent par le système (S) suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y \leq 60 \\ 3x + y \leq 90 \\ 2y \leq 42 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1. On a représenté sur le graphique fourni en annexe 2, à rendre, les droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations respectives

$$y = -\frac{1}{2}x + 30, \quad y = -3x + 90 \quad \text{et} \quad y = 21.$$

- (a) Identifier ces droites sur le graphique en y portant le nom des droites.
- (b) Résoudre graphiquement le système (S) (hachurer les zones du plan qui ne conviennent pas).
- (c) À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
 - le fabricant peut-il produire 5 lots de 100 cadres de type TU et 25 lots de 100 cadres de type TR ?
 - le fabricant produisant 20 lots de 100 cadres de type TU ; quel est alors le maximum de lots de type TR qu'il peut alors réaliser ?

2. Pour un lot de 100 cadres TU, le fabricant réalise 5 000 euros de bénéfice, et pour un lot de 100 cadres TR, il réalise 7 000 euros de bénéfice.

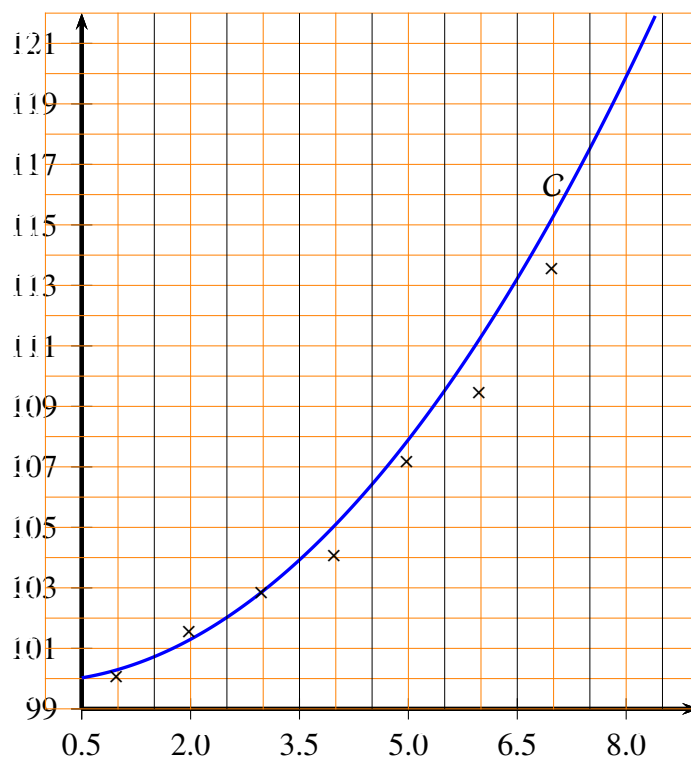
(a) Exprimer en fonction de x et y le montant des bénéfices B , en milliers d'euros, du fabricant.

(b) Résoudre le système (S') d'équations : (S') :
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 30 \\ y = -3x + 90 \end{cases}$$

(c) Sur l'annexe 2, à rendre, tracer la droite Δ d'équation $y = -\frac{5}{7}x + 15$ correspondant à un bénéfice de 105 000 euros.

(d) Déterminer par le calcul le couple (x, y) qui fournira au fabricant de vélos le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice en milliers d'euros.

ANNEXE 1



ANNEXE 2

