LYCÉE ALFRED KASTLER **TSTG-CFE**
2012–2013

Devoir surveillé n°03 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) L'équation que l'on obtient est $y = 2{,}16x + 96{,}81$.
   (b) Pour tracer la droite, il suffit de 2 points.
   On peut aussi utiliser le coefficient directeur :
   Comme $2{,}2 \times 5 = 11$, quand on se déplace de 5 unités en absisse, on doit monter de 11 unités en ordonnée.
   (c) On peut déterminer la valeur demandée par une lecture graphique, sans oublier de faire les traits nécessaires à cette lecture.
   Sinon, on peut obtenir un résultat par le calcul : Le rang correspondant à l'année 2007 étant $x = 8$, on a $y = 2{,}2 \times 8 + 96{,}8 = 114{,}4$. Une estimation de l'indice pour l'année 2007 est donc 114,4.
2. (a) On remplace x par 8 dans l'équation :
   $y = 0{,}3 \times 8^2 + 0{,}1 \times 8 + 99{,}9 = 119{,}9$ (soit presque 120 par lecture graphique).
   (b) La valeur de l'indice en 2007 selon cet ajustement est précisément la valeur calculée précédemment, soit 119,9.

Exercice 2

1. (a) Comme les lignes 2 et 3 sont proportionnelles, pour obtenir la valeur en E2 qui est demandée, il suffit de faire :
   $\dfrac{3234}{100} \times 335 = 10833{,}9 \simeq 10834$ (arrondi à l'unité).
   (b) Le calcul de l'indice pour 2005 est le suivant :
   $\dfrac{12712}{3234} \times 100 \simeq 393$ (arrondi à l'unité).
2. La formule en C3 permettant le calcul des indices est la suivante :
   « = C2/$B2*$B3 » ou « = C2/$B2*100 ». Il faut bloquer la colonne B, de référence.
3. (a) Le taux d'évolution de 2001 à 2003 se lit grâce aux indices, puisque la référence est 2001 : $260 - 100 = 160$, donc 160%.
   (b) Puisque le taux est sur deux ans, le taux moyen annuel s'obtient par la formule :
   $\sqrt{1 + \dfrac{160}{100}} - 1 = \sqrt{2{,}6} - 1 \simeq 0{,}61$, soit 61%.

Exercice 3
Partie A

1. On a $f'(x) = 2 \times 1 + 0 - 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x-4}{x} = \dfrac{2(x-2)}{x}$. Comme, sur $]0;+\infty[$, x est positif, et comme 2 est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$. Or $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Donc :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\Vert$	$\searrow$	$2-4\ln(2)$	$\nearrow$	

2. En utilisant la calculatrice :
   - tableau de valeurs en diminuant le pas petit à petit
   - ou directement la résolution graphique de f(x)=0 avec
     - G-Solv > ROOT (casio)
     - Calc > zero (TI)

   On trouve cette valeur approchée de α : 3,51286. L'encadrement à 10^{-2} près est donc : $3{,}51 < \alpha < 3{,}52$.

   Et l'encadrement à 10^{-3} près est : $3{,}512 < \alpha < 3{,}513$.

Partie B

1. La dérivée de $x \mapsto x^2 + 2x$ est $x \mapsto 2x + 2$. Déterminons la dérivée de $x \mapsto -4x\ln(x)$. Cette fonction est de la forme uv avec $u(x) = -4x$ et $v(x) = \ln(x)$. Donc $u'(x) = -4$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Par suite, la dérivée de uv est $u'v + uv'$, donc on a : $-4\ln(x) - 4x \times \dfrac{1}{x} = -4\ln(x) - 4$.
   Finalement, $C'(x) = 2x + 2 - 4\ln(x) - 4 = 2x - 2 - 4\ln(x)$.
2. Puisque $C'(x) = f(x)$ l'étude du signe de la dérivée C' est l'étude du signe de f.
   Or, puisque f est croissante sur $[2;6]$ et s'annule en α, elle est négative sur $[2;\alpha]$, puis positive sur $[\alpha;6]$. f est décroissante sur $[1;2]$, mais $f(1) = -1$ est négative, donc f est négative sur $[1;2]$.
   Ainsi, f est négative sur $[1;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;6]$. Par suite :

x	1		α		6
Signe de $C'(x) = f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
variations de C	3	$\searrow$	$C(\alpha) \simeq 1{,}711$	$\nearrow$	$\simeq 4{,}998$

   Le coût moyen minimal de construction d'un boîtier est minimum pour $x = \alpha$, or l'unité est en milliers, et $\alpha \simeq 3{,}513$, donc on obtient 3 513 boîtiers en arrondissant à l'unité.

Exercice 4

1. (a) La droite D_3 d'équation $y = 21$ est la droite horizontale passant par $(0;21)$.
   La droite D_1 d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x+30$ est la droite qui passe par $(0;30)$ (elle est légèrement décroissante).
   La droite d'équation $y = -3x + 90$ est la droite la plus « pentue », elle passe par $(30;0)$ car $-3 \times 30 + 90 = -90 + 90 = 0$.

(b) On a : $x + 2y \leqslant 60 \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{1}{2} + 30$. Il faut donc hachurer la partie située au dessus de la droite D_1.

On a : $3x + y \leqslant 90 \Leftrightarrow y \leqslant -3x + 90$. Il faut donc hachurer la partie située au dessus de la droite D_2.

Ensuite, $2y \leqslant 42 \Leftrightarrow y \leqslant 21$. Il faut donc hachurer la partie située au dessus de la droite D_3.

Enfin, on a les contraintes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, donc on hachure Les parties situées à gauche de l'axe des ordonnées, et celles situées en dessous de l'axe des abscisses.

Il reste alors un pentagone irrégulier dont trois des cinq sommets sont l'origine du repère, et les points de coordonnées $(30; 0)$ et $(0; 21)$.

(c) – Le point de coordonnées $(5; 25)$ est dans la partie hachurée.
Il n'est donc pas possible de produire 5 lots de type TU et 25 de type TR.
– Si le nombre de lots TU produits est 20, le nombre maximal de lots TR réalisés est 20. En effet, le point $(20; 20)$ appartient à la droite D_1, et est sur la frontière de la zone des solutions.

2. (a) On a $B(x,y) = 5x + 7y$ (en respectant les unités).

(b) Résoudre le système (S') revient à chercher les coordonnées du point d'intersection de D_1 et D_2. Pour le résoudre : puisque les deux équations donnent la valeur de y, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 30 = -3x + 90 &\Leftrightarrow -x + 60 = -6x + 180 \quad (\times 2) \\ &\Leftrightarrow 5x = 120 \\ &\Leftrightarrow x = 24 \end{aligned}$$

Par suite, $y = -3 \times 24 + 90 = -72 + 90 = 18$ Ainsi, $\mathcal{S} = \{(24; 18)\}$. On peut vérifier sur le graphique la validité de la solution.

(c) Justifions d'abord que l'équation donnée correspond bien à un bénéfice de 105 000 euros : Pour un tel bénéfice, et avec les unités, on a $B(x,y) = 5x + 7y = 105$.

Or $5x + 7y = 105 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7} + \frac{105}{7} = -\frac{5}{7} + 15$.

Pour tracer la droite, on a le point $(0; 15)$ et le point $(35; -10)$

(d) On peut observer que pour un bénéfice supérieur, on obtient une droite de même coefficient directeur, donc parallèle, mais située au dessus de Δ (seule la valeur de l'ordonnée à l'origine change).

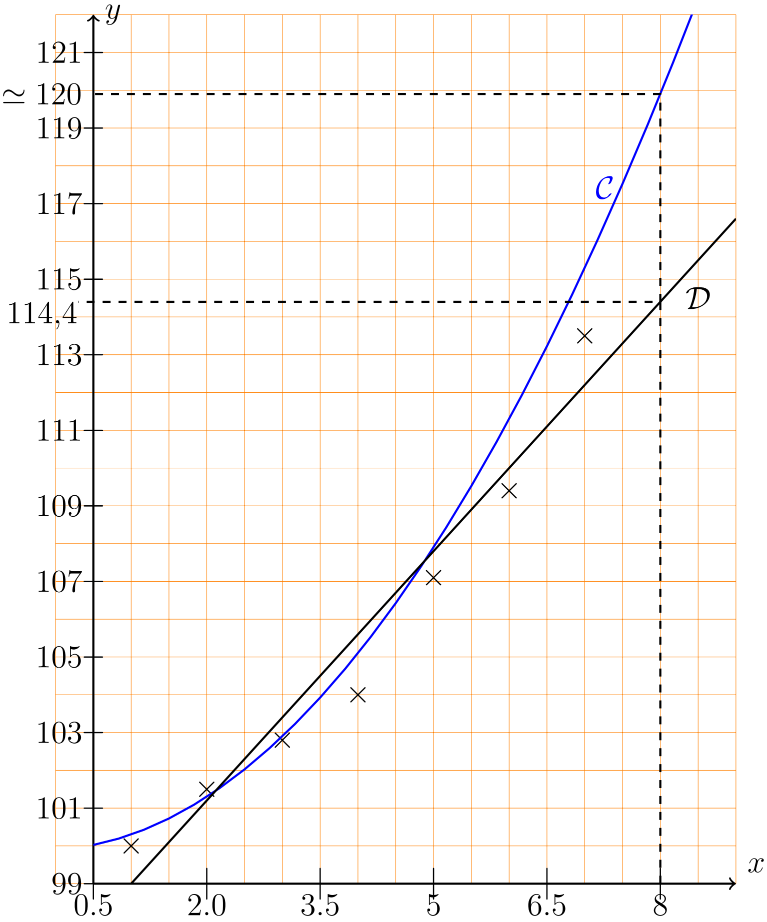
Par exemple, pour un bénéfice de 140 000 euros, on a :
$5x + 7y = 140 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}x + \frac{140}{7} = -\frac{5}{7}x + 20$.

Le bénéfice maximal est donc obtenu pour le point de la zone des solutions qui contient une droite de coefficient directeur $-\frac{5}{7}$ ayant une ordonnée à l'origine maximale.

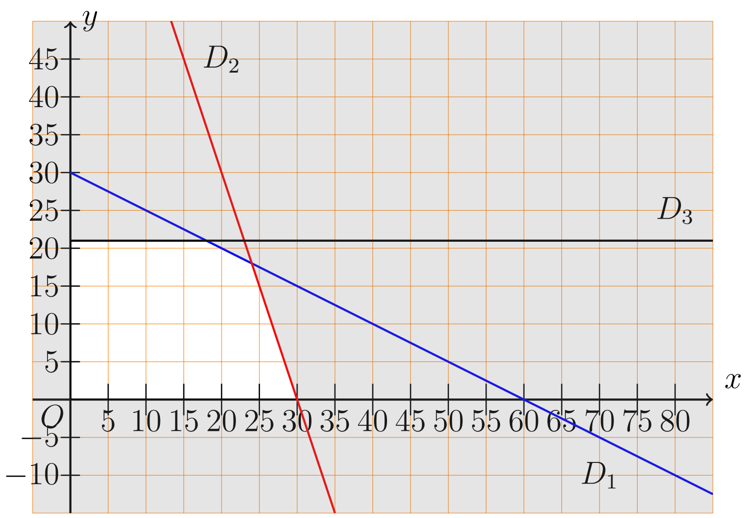
Graphiquement, par glissement parallèlement à la droite (Δ), on observe que ce point est précisément le point dont on a déterminé les coordonnées en résolvant le système (S').

Le couple $(x; y)$ est donc $(24; 18)$. On calcule alors $5 \times 24 + 7 \times 18 = 246$. Le bénéfice maximal est donc de 246 000€.

Figures



y
121
≃ 120
119
117
115
114,4
113
111
109
107
105
103
101
99
0.5
2.0
3.5
5
6.5
8
x
$\mathcal{C}$
$\mathcal{D}$



y
45
40
35
30
25
20
15
10
5
O
−5
−10
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80
x
D_2
D_3
D_1