Chapitre :
Suites

∽

I. Variations

Définition Une suite u est croissante si, quelque soit n entier naturel, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite u est décroissante si, quelque soit n entier naturel, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Une suite u est constante si, quelque soit n entier naturel, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque Certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes, ni constantes (exemple).

Méthode Pour déterminer les variations d'une suite, il suffit de simplifier et d'étudier le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$. Par exemple, si celle-ci est toujours positive alors $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc u est croissante.
Dans le cas où $u_n = f(n)$, si f est (dé)croissante alors u est (dé)croissante

Exemple $u_n = 5n + 4$ par les deux méthodes.

En particulier :

Propriété **(Suites arithmétiques)** Soit u une suite arithmétique de raison a.

- Si $a < 0$, alors u est décroissante.
- Si $a > 0$, alors u est croissante.

▶ **Exercice :** 1,4p127

Propriété **(Suites géométriques)** Soit u une suite géométrique positive ($u_0 > 0$) de raison (positive) b.

- Si $0 < b < 1$, alors u est décroissante.
- Si $b > 1$, alors u est croissante.
- Si $b = 1$, alors u est croissante.

Preuve : On exprime $u_{n+1} - u_n$, en sachant que $u_{n+1} = b \times u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = b \times u_n - u_n = (b-1)u_n = (b-1)b^n u_0$$

Puisque b et u_0 sont positifs, alors $b^n u_0 > 0$ et c'est $b - 1$ qui donne le signe de $u_{n+1} - u_n$. On conclut tous les cas donnés dans la propriété. □

▶ **Exercice :** 23p129

II. Limites de suites géométriques

⊛ **Activité :** 5p101

Propriété Soit u une suite géométrique de raison b et de premier terme u_0 positifs.

- Si $0 < b < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $b > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple $u_n = 3 \times 1{,}1^n$ et $u_n = 3 \times 0{,}9^n$

On peut déterminer de même la limite des sommes de termes successifs d'une suite géométrique dans certains cas :
On rappelle que $S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$.
Ainsi, si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{-1}{b - 1} = \dfrac{1}{1 - b}$.

▶ **Exercices :** 25p129, 40p134