Chapitre :
Logarithme

∽

⊛ **Activité :** 1p138 (jusqu'à 2. compris)

I. Définition

Définition On admet qu'il existe une unique fonction, appelée logarithme (népérien) et notée ln, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

⚠ le logarithme n'est défini que pour des nombres **strictement positifs** !
Dans cette définition, il faut ici surtout retenir que $\ln(1) = 0$

II. Propriétés

Propriété Soit a et b des réels strictement positifs. Alors :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

On dit que le logarithme transforme un produit en somme.

Preuve : Admis. □

Exemple $\ln(6) = \ln(3 \times 2) = \ln(3) + \ln(2)$.
$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2) + \ln(2) = 2\ln(2)$.

En conséquence, on obtient cet ensemble de formules :

Propriété Soit a et b des réels strictement positifs. Alors :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^n) = n\ln(a) \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Preuve : Faire une ou deux preuves. □

Exemple $\ln(5) - \ln(3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ et $\ln(0{,}5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

- ▶ **Exercices :** 3,4,5,9,10p158
- ▶ **Exercices :** 15,16p159
- ▶ **Exercices :** 41(c),43,45,46p162 (dérivée)

III. Variations. Nombre e

Nous savons par la définition que la dérivé de la fonction logarithme est la fonction inverse. Or, sur $]0; +\infty[$, cette fonction est strictement positive. Par conséquent La fonction logarithme est strictement croissante.

Courbe représentative de ln, avec la tangente en 1.

Il existe une unique valeur de x telle que $\ln(x) = 1$. On note cette valeur e. Une valeur approchée de e est 2,71828.

Remarque Il y a donc deux valeurs du logarithme à connaître : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

⚠ Ne pas les confondre !

▶ **Exercices :** 7,8p158, 12p159 (nombre e)

Propriété Le signe de ln est donné par le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$	

IV. Équations et inéquations

Propriété Du fait que la fonction ln est strictement croissante, on a :

$$a < b \text{ équivaut à } \ln(a) < \ln(b)$$

De même,

$$a = b \text{ équivaut à } \ln(a) = \ln(b)$$

⚠ Il faut déterminer l'ensemble de définition des équations et inéquations.

Exemple Résolution de $\ln(2 - 3x) < \ln(5x + 2)$.

Exemple Résolution de $\ln(2x + 1) = \ln(2 - x)$.

▶ **Exercice :** 17(c)p159 (vrai/faux)

▶ **Exercices :** 22(c),23,25p160 (équations)

▶ **Exercices :** 28,29p161 (inéquations et signes)

▶ **Exercice :** 33p161 (signe de produit avec ln)

▶ **Exercices :** 38,39p162 (problèmes)