Chapitre : Exponentielle

∽

I. La fonction exponentielle

⊛ **Activité :** 1p186 (fonction réciproque de ln)

1. Définition et notation

Définition La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x et pour tout réel y strictement positif,

$$y = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)$$

Exemple Comme $\ln(1) = 0$, on a donc $\exp(0) = 1$, et comme $\ln(e) = 1$, on a donc $\exp(1) = e$.

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$

Définition (Notation) On a vu que pour tout n entier naturel, $\ln(a) = n$ équivaut à $a = e^n$. Or d'après la définition de l'exponentielle, $\ln(a) = n$ équivaut à $n = \exp(a)$. On a donc $\exp(a) = e^n$. On généralise cette notation à tout réel : $\exp(x) = e^x$.

Exemple On a donc bien $\exp(0) = e^0 = 1$ et $\exp(1) = e^1 = e$.

2. Propriétés algébriques

Propriété On a les égalités suivantes :

$$\ln(e^x) = x \qquad \text{et} \qquad e^{\ln(x)} = x \text{ (pour } x > 0)$$

Propriété Si le logarithme transforme un produit en somme, l'exponentielle transforme elle une somme en produit. Cela signifie que pour tous réels a et b,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Preuve : Il suffit de calculer le logarithme des deux expressions et voir que les résultats sont égaux. □

Propriété Soit a et b réels, et n entier relatif. Alors :

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^n = e^{an}$$

► **Exercices :** 3,4,6,7p206 (manipulation d'expressions)

► **Exercices :** 9,11p206 (calculs d'images de fonctions)

3. Dérivée et variations

Théorème La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction exponentielle. Autrement dit :

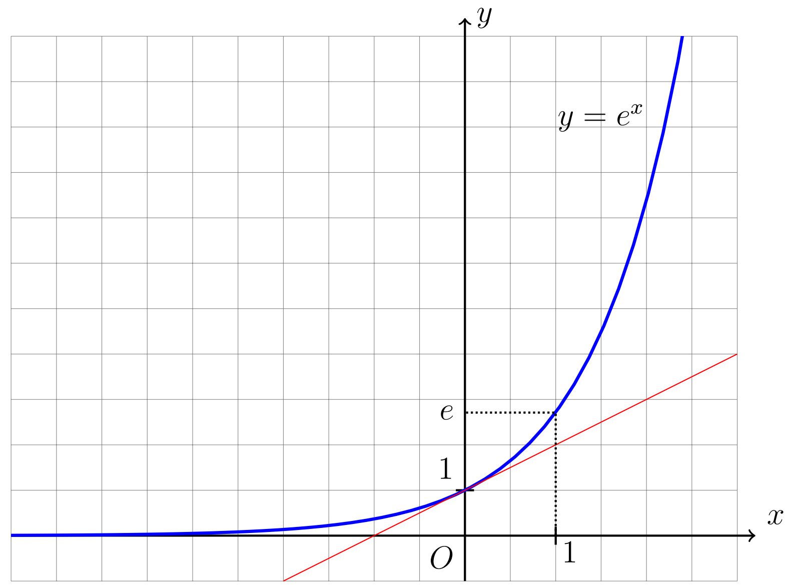
$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Preuve : On admet que la fonction exponentielle est dérivable.
On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\exp(x))$, définie sur $\mathbb{R}$. f est de la forme u suivie de v avec $u = \exp$ et $v = \ln$. Comme u et v sont dérivables, f l'est, et : $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.
Or $u'(x) = \exp'(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc : $f'(x) = \exp'(x) \times \dfrac{1}{\exp(x)} = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$.
Or on sait en fait que $f(x) = x$ et $f'(x) = 1$. Donc :

$$\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow \exp'(x) = \exp(x)$$

Ce qu'il fallait démontrer. □
Nous avons déjà fait la remarque de $\exp(x)$ est strictement positif quelque soit x réel.
Or $\exp(x) = \exp'(x)$, donc la dérivée de l'exponentielle est toujours positive. Par conséquent, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $exp'(x)$	$+$
variations de exp	$\nearrow$



▶ **Exercices :** 40,42,43p209 (dérivation)

4. Équations et inéquations

Propriété Du fait que la fonction exp est strictement croissante, on a :

- Quelques soient a et b réel, $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$.
- Quelques soient a et b réel, $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$.

Cela permet de résoudre certaines (in)équations.

Exemple Résoudre $e^{-4x} = e^{2x+12}$.

▶ **Exercices :** 18,19p207 (équations)

▶ **Exercice :** 27p208 (inéquation)

▶ **Exercice :** 29p208 (étude de signe)

★ **Approfondissement :** 47,48p210 (étude de variations), 55p212 (problème)

II. Exponentielle de base a $(a > 0)$

1. Définition et propriétés algébriques

Définition Nous avons vu que pour tout réel posifif a et tout entier naturel n, $e^{n\ln a} = a^n$.
On généralise la notation en exposant à des exposants réels.
Autrement dit, soit $a > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}$, alors on note :

$$a^x = e^{x\ln a}$$

Définition On sait déjà que pour tout $a > 0$, $a = e^{\ln a}$.
Par suite, pour tout x réel, on note $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}$.
Soit alors $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto a^x = e^{x\ln a}$$

Exemple On peut considérer la fonction exponentielle de base 2 : $f :\mapsto 2^x$.
On a alors $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3{,}4) = 2^{3{,}4} \simeq 10{,}56$, ...

Propriété Soit a un réel strictement positif et soit x et y des nombres réels.
Alors :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^x > 0$$

$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

Soit $b > 0$, alors :

$$(ab)^x = a^x \times b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

▶ **Exercices :** 61,62p214

2. Variations

Propriété Soit $a > 0$. La fonction $f : x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ln(a) \times a^x$.

Preuve : Comme $a^x = e^{x\ln a}$, f est de la forme e^u avec $u(x) = x\ln(a)$.
Ainsi $u'(x) = \ln(a)$, et $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = \ln(a) \times e^{x\ln(a)} = \ln(a) \times a^x$. □
Puisque $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$ et $a^x > 0$ quelque soit x, on a la propriété suivante :

Propriété Soit $a > 0$ et soit $f : x \mapsto a^x$.

- Si $0 < a < 1$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$;

- Si $a > 1$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercices :** 71,82,73,74p215

▶ **Exercices :** Fiche d'exercice.