Chapitre :
Suites

∽

I. Généralités

⊛ **Activité :** utilisation de la calculatrice : p118

Définition Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. On note u_n l'image de n par u, autrement dit $u_n = u(n)$. Le nombre n est l'indice de u_n, u_n est le terme général, ou terme de rang n, de la suite. On note aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (il est plus simple de noter u).

Exemple Soit u la suite de terme général $u_n = \sqrt{n-1}$. La suite n'est pas définie en 0, elle est définie sur les entiers supérieurs à 1 : on note $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
Son terme de rang 5 est $u_5 = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$.

Une suite peut être définie complètement de deux manières :
- sous une forme fonctionnelle (explicite) : on donne u_n en fonction de n. C'est le cas de l'exemple précédent.
- Sous une forme récurrente : un terme est donné en fonction du terme précédent. Exemple :

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = -2u_n + 4 \end{cases}$$

  Dans ce cas, la détermination de la valeur d'un terme se fait en déterminant la valeur de tous les termes précédents. Ici, $u_1 = -2u_0 + 4 = -2 \times 2 + 4 = 0$, puis $u_2 = -2u_1 + 4 = u_2 \times 0 + 4 = 4$.

Pour représenter une suite graphiquement, on place dans un repère les points de coordonnées (n,u_n), sans les relier.

▶ **Exercices :** 2,3p127

II. Suites arithmétiques

⊛ **Activité :** 2p97 (sauf B.2)
Il y a deux manières équivalentes de définir une suite arithmétique :

Définition Soit a un nombre réel fixé. Une suite u est arithmétique de raison a si et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Une suite u est arithmétique de raison a et de premier terme u_0 si et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a \times n + u_0$$

Remarque On voit avec la première définition que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même constante, la raison a.

Remarque Une suite arithmétique est totalement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple Soit u la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 3. On a de manière équivalente :

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = u_n - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n = -2n + 3$$

Remarque Si le premier terme de la suite n'est pas u_0 mais u_2 par exemple, alors

$$u_n = u_2 + (n-2) \times a$$

Plus généralement, si la suite commence par u_p, alors $u_n = u_p + (n-p) \times a$ (pour $n \geqslant p$)

Exemple Voir l'exemple du livre page 103 (capital retraite à versement constant)

Propriété **(caractéristique)** u est une suite arithmétique si et seulement si, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

Autrement dit, chaque terme est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

▶ **Exercices :** 7,8,9p127

▶ **Exercices :** 21p129 (problème)

⊛ **Activité :** 4p99-100 A seulement, sauf question 3 : somme de termes.

Propriété **(Somme de termes)** Soit u une suite arithmétique. Alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Plus généralement, la somme de termes successifs d'une suite arithmétiques se calcule par la formule :

$$S_n = \frac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exemple Question 3 de l'activité (page 100)

▶ **Exercices :** 13,14,15p128

▶ **Exercices :** 19p128,20p129 (problèmes)

III. Suites géométriques

Comme pour les suites arithmétiques, il y a deux définitions équivalentes :

Définition Une suite u est géométrique de raison b si et seulement si, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = b \times u_n$$

Une suite u est géométrique de premier terme u_0 et de raison b si et seulement si, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times b^n$$

Plus généralement, si $n \geqslant p$,

$$u_n = u_p \times b^{n-p}$$

Remarque On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même réel, la raison b.

Remarque Une suite géométrique est totalement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple Soit u la suite géométrique de raison -2 et de premier terme 3. On a de manière équivalente :

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = (-2) \times u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad u_n = 3 \times (-2)^n$$

▶ **Exercices :** 26,27p129, 29p130

On retrouve les suites géométriques dans le cas concret des compte d'épargne dits à « intérêts composés ».

Exemple Une personne dépose 1 000 euros sur un compte à intérêts composés à un taux de 10%. Au bout d'un an, le compte contient alors $1\,000 + \dfrac{10}{100} \times 1\,000$, que l'on peut écrire plus simplement $\left(1 + \dfrac{10}{100}\right) \times 1\,000 = 1{,}1 \times 1\,000$ et qui vaut 1 100. L'année suivante, on applique le même taux, mais à la dernière valeur du capital, à savoir 1 100. Donc au bout de deux ans, le capital est de $1\,100 \times 1{,}1 = 1\,210$ euros.

Pour passer d'une valeur à l'autre, on multiplie toujours par 1,1, ce qui revient à faire une augmentation de 10%.

▶ **Exercice :** TP1p109 (placement sur compte d'épargne, sur ordinateur)

Propriété **(Caractéristique)** u est une suite géométrique si et seulement si, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$(u_n)^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$$

On dit que u_n est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

⊛ **Activité :** 4p100 (B) : somme

Propriété Soit u une suite géométrique de raison $b \neq 1$. Alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$$

Plus généralement, si la somme commence par le terme u_p ($p \leqslant n$) :

$$\begin{aligned} S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n &= u_p \times \frac{b^{n-p+1} - 1}{b - 1} \\ &= \text{premier terme} \times \frac{\text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1} \end{aligned}$$

- ▶ **Exercices :** 30,31,32p130
- ▶ **Exercices :** 35,36p130
- ▶ **Exercice :** TP2p109-110 (comparaison)