Chapitre :
Dérivation

∽

I. Du nombre dérivé à la fonction dérivée

⊛ **Activité :** 1pp60-61 : a.b.c.e.f. (rappels sur le nombre dérivé et la tangente)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Définition Si la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on définit le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, comme étant le coefficient directeur de cette tangente.
Par suite, l'équation de la tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p$$

où p est un réel à déterminer.
On a la formule suivante :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple On suppose que $f(3) = 5$ et $f'(3) = -2$. L'équation de la tangente de la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 a pour équation :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

Or

$$f'(3)(x - 3) + f(3) = -2(x - 3) + 5 = -2x + 6 + 5 = -2x + 11$$

Donc l'équation réduite est :

$$y = -2x + 11$$

▶ **Exercice :** 2p85 (lecture graphique de nombres dérivés)

⊛ **Activité :** 2pp61-62 (fonction dérivée à l'aide de la calculatrice)

Définition Si f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I. On définit alors la fonction dérivée de f, notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x, autrement dit $f'(x)$.

Définition Si f' est la fonction dérivée de f sur I, on dit que f est une primitive de f' sur I.

Pour déterminer la fonction dérivée f' d'une fonction f, on utilise des formules (qui seront ici admises).
Pour les fonctions usuelles on utilise le tableau suivant :

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$ (constante) sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Exemple Dérivation de $f : x \mapsto x^7$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$

▶ **Exercices :** 6p85

Pour les opérations sur les fonctions on utilise la propriété suivante :

Propriété Soit u et v deux fonctions dérivables, et soit k un nombre réel. Alors :
- ku est dérivable et $(ku)' = ku'$.
- $(u+v)$ est dérivable et $(u+v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si u ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.
- Si v ne s'annule pas, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

En pratique, pour la rédaction, on ne détaille que l'utilisation des trois dernières formules. Autrement dit, pour la somme et la multiplication par une constante, les formules étant simples on dérive « directement », en particulier les fonctions polynomiales.

Exemple Dérivation de :
- $f : x \mapsto 3x^3 + 2x^2 + 4x + 7$
- $g : x \mapsto \dfrac{2x}{5x+1}$
- $h : x \mapsto \sqrt{x}(3x^2 - 4x)$

▶ **Exercices :** 8,9,10,11,12p86

▶ **Exercices :** 14,15p86 (réécriture de la dérivée)

▶ **Exercices :** 19p86 (équation de tangente)

II. Signe de f' et variations de f

⊛ **Activité :** 3p62 (études des différentes fonctions par groupes)

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

La réciproque est vraie, et permet de déterminer les variations d'une fonction :

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple Étude des variations de $f : x \mapsto 4x^2 - 2x + 3$

▶ **Exercices :** 27,28(c)p87 (graphique)

▶ **Exercices :** 29,30p88 (graphique, trouver la courbe de la dérivée)

▶ **Exercices :** 32,33(c)p88 (calculs)

▶ **Exercice :** 39,40 (sauf c)p89 (tracer une fonction)

▶ **Exercice :** (type bac) 54p92 (question 1)

III. Extremum

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f admet un extremum en un point x_0 à l'intérieur de I, alors $f'(x_0) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie : il faut préciser davantage :

Théorème Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' s'annule en un point x_0 à l'intérieur de I **en changeant de signe** en x_0, alors f admet un extremum en x_0.

Exemple Revoir l'exemple précédent.

▶ **Exercices :** 35,37,38p89