Chapitre :
Taux de variation

∽

I. Cas de deux évolutions successives

⊛ **Activité :** Bp7 et Dp7

Rappel Le taux de variation permettant de passer d'une valeur V_i à une valeur V_f est :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

On a alors

$$V_f = (1+t)V_i$$

Le nombre $1+t$ associé au taux de variation t est appelé coefficient multiplicateur (noté parfois CM).

Dans le cas où l'on fait deux évolutions successives avec des taux de variation t_1 et t_2, On multiplie les deux coefficients multiplicateurs pour obtenir le coefficient multiplicateur permettant de passer de la première valeur à la dernière valeur. En effet :

$$V_3 = CM_2 \times V_2 = CM_2 \times CM_1 \times V_1$$

Le coefficient multiplicateur global CM est donc $CM_2 \times CM_1$.
On cherche le **taux global** de variation permettant de passer de la première à la dernière valeur.

Propriété Pour deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, le taux global t est tel que :

$$1 + t = (1 + t_1)(1 + t_2) \qquad \text{soit} \qquad t = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1$$

Exemple Le prix du carburant subit une hausse de 2,5% puis une baisse de 0,4%. Le taux de variation global est alors :

$$t_g = (1 + 0{,}025)(1 - 0{,}004) - 1 = 0{,}0209$$

soit 2,09%

On peut chercher également le **taux moyen** sur deux évolutions successives. Il s'agit du taux qui, répété deux fois, donnerait la même évolution globale.

Propriété Pour deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, le taux moyen t est tel que :

$$(1 + t)^2 = (1 + t_1)(1 + t_2) \qquad \text{soit} \qquad t = \sqrt{(1 + t_1)(1 + t_2)} - 1$$

Exemple Dans le cas précédent, le taux moyen est :

$$t_m = \sqrt{(1 + 0{,}025)(1 - 0{,}004)} - 1 \simeq 0{,}010396$$

soit environ 1,04%

▶ **Exercice :** 15p21 (corrigé)

▶ **Exercices :** 20p22

II. Approximations

Dans le cas de deux évolutions de même taux t, le taux global est donné par

$$t_g = (1+t)^2 - 1$$

d'après la section précédente.
Au lieu d'utiliser cette formule, on peut dans certains cas faire un calcul plus simple qui donnera une valeur approchée du taux global :

Propriété Si t est proche de 0, alors le taux global associé à deux variations successives au taux t est donné par :

$$t_g \simeq 2t$$

Le coefficient multiplicateur global est alors approché par le nombre $1 + 2t$.

Exemple Dans le cas de deux évolutions successives de taux 1%, le taux global est exactement $(1+0{,}01)^1 - 1 = 0{,}0201$, soit 2,01%, qui est effectivement proche de 2%.

Toujours dans le cas de deux évolutions, mais cette fois-ci à un taux global donné, le taux moyen est donné par :

$$t_m = \sqrt{1+t} - 1$$

Là aussi on peut en donner une valeur approchée :

Propriété Si t est proche de 0, alors le taux moyen associé à deux variations successives au taux global t est donné par :

$$t_m \simeq \frac{t}{2}$$

Le coefficient multiplicateur moyen est alors approché par le nombre $1 + \frac{t}{2}$.

Exemple Si le taux global est de 2%, le taux moyen est $\sqrt{1+0{,}02} - 1 \simeq 0{,}00995$, soit environ 0,995%, ce qui est effectivement proche de 1%.

Rappel Si t est le taux d'évolution permettant de passer de V_1 à V_2, alors le taux permettant de passer de V_2 à V_1, appelé taux d'évolution réciproque, est donné par :

$$t_r = \frac{1}{1+t} - 1$$

En effet, $V_2 = (1+t)V_1$, donc $V_1 = \frac{1}{1+t}V_2$, et donc $\frac{1}{1+t}$ est le coefficient multiplicateur réciproque. Il suffit de soustraire 1 pour obtenir le taux réciproque.

Il y a là aussi la possibilité de donner une valeur approchée :

Propriété Si t est proche de 0, alors le taux réciproque associé à une variation de taux t est donné par :

$$t_r \simeq -t$$

Le coefficient multiplicateur moyen est alors approché par le nombre $1 - t$.

Exemple Si le taux est 1%, alors le taux réciproque vaut $\dfrac{1}{1+0{,}01} - 1 \simeq -0{,}00990$ et correspond à une baisse de 0,99%, ce qui est effectivement proche d'une baisse de 1%

▶ **Exercices :** 35(c),36p23

▶ **Exercice :** 38p24

▶ **Exercice :** TP3p16 (ACCPE ?)

III. Indices

Lorsque l'on considère des évolutions successives, il peut être pratique de les représenter en utilisant une date de référence pour laquelle on considère une valeur de référence, l'indice 100. Pour les autres dates, on donne alors un indice calculé proportionnellement à cet indice.
Un indice traduit une évolution par rapport à la quantité de référence. Cela permet de lire le taux d'évolution depuis la date de référence.
La formule donnant l'indice à une date donnée est la suivante :

$$\text{Indice à la date } k = \frac{\text{Valeur à la date } k}{\text{Valeur à la date de référence}} \times 100$$

Si la date de référence est n, on dit que les indices sont les indice en base 100 à la date n.

Exemple Voir l'exemple page 14.

► **Exercices :** 39(c) (sauf 2.),41,42p24

IV. Moyenne géométrique et taux moyen

⊛ **Activité :** 3p9

Définition Soit x_1, x_2,..., x_n des nombres réels positifs. Leur moyenne géométrique est le nombre :

$$g = (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Autrement dit, g est la racine n-ième du produit des x_i.

Propriété **(taux global pour n variations)** Le taux global d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le réel T tel que

$$1 + T = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \cdots \times (1 + t_n)$$

Propriété **(taux moyen pour n variations)** Le taux moyen d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le réel t tel que

$$(1 + t)^n = (1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \cdots \times (1 + t_n)$$

Soit

$$1 + t = ((1 + t_1) \times (1 + t_2) \times \cdots \times (1 + t_n))^{\frac{1}{n}}$$

Exemple On considère trois évolutions successives : +5,2%, +3,2% et +3,2%.
Le taux global est $T = 1{,}052 \times 1{,}032 \times 1{,}032 - 1 \simeq 0{,}127$, soit 12,7%.
Le taux moyen est $t = (1{,}052 \times 1{,}032 \times 1{,}032)^{\frac{1}{3}} - 1 \simeq 0{,}041$, soit 4,1%.

▶ **Exercices :** 21,28,30,31p22 et 33p23

▶ **Exercices :** 19,23,24,25p22