# Chapitre :
# Probabilités

∽

# I. Rappels

⊛ **Activité :** 1p256 (rappel de vocabulaire)

⊛ **Activité :** 4p258 (rappel de la formule de la probabilité de l'union)

**Propriété** Soit $A$ un événement. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de $A$. On a alors :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

**Propriété** Soit $A$ et $B$ deux événements. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Dans le cas où $A$ et $B$ sont **incompatibles** (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$), alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

▶ **Exercices :** 1,2p270 (QCM)

▶ **Exercices :** 7p270 (arbre), 9p271 (tableau)

**Rappel** Dans un arbre de probabilité :
- La somme des probabilités des branches provenant d'un même nœud vaut 1 ;
- on multiplie les probabilités le long des branches ;
- on ajoute les probabilités des branches ;

# II. Conditionnement

**Définition** Soit $A$ et $B$ deux événements. On suppose que $\mathbb{A} \neq 0$. Alors la probabilité (conditionnelle) de $B$ sachant $A$, noté $\mathbb{P}_A(B)$, est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

**Exemple** Tirage au hasard et sans remise de boules de couleurs : deux vertes et une bleue.
Sachant que la première est verte, quelle est la probabilité que la seconde soit verte ?
Soit $A$ l'événement « la première boule est verte ».
Soit $B$ l'événement « la seconde boule est verte ».
On nous demande de déterminer $\mathbb{P}_A(B)$.

Si la première est verte, il reste une verte et une bleue. Ainsi, comme le tirage est fait au hasard, la probabilité cherchée est $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{1}{2}$.
Déterminons cela autrement :
Faire un arbre complet distinguant toutes les boules pour être dans un cas d'équiprobabilité.
On voit alors que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
Par suite, on trouve bien :

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}_A(B)$$

Montrer ensuite l'arbre simplifié avec les probabilités conditionnelles au deuxième niveau.

**Propriété** Dans le cas où les événements $A$ et $B$ sont de probabilité non nulle,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$$

**Preuve :** Conséquence directe de la définition. □

▶ **Exercices :** 14,15,16(c) p272

▶ **Exercices :** 17,18p273

▶ **Exercices :** 21p274, puis 23p274 en DM

# III. Indépendance

**Définition** Soit $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle.
On dit que $A$ et $B$ sont indépendants si la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. Autrement dit, si :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_B(A) = P(A)$$

**Propriété** On sait déjà que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$. Par conséquent, si $A$ et $B$ sont indépendants, alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

▶ **Exercices :** 26p275

**Exemple** On considère le tirage avec remise de deux boules dans une urne (2 bleues, 3 rouges).
Soit $B_1$ : « la première boule est bleue »,
et soit $R_2$ : « La deuxième boule est rouge ».
En considérant toutes les 5 boules distinctes, les tirages des couples (ordonnés) sont équiprobables.
Avec un arbre (non pondéré), on peut alors trouver : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{2 \times 5}{5 \times 5} = \dfrac{2}{5}$, et $\mathbb{P}(R_2) = \dfrac{5 \times 3}{5 \times 5} = \dfrac{3}{5}$.
Si la première boule est bleue, le second tirage étant fait au hasard et après remise, on a : $\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \dfrac{3}{5}$.
On observe alors que $\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \mathbb{P}(R_2)$ : $B_1$ et $R_2$ sont indépendants.
On dit que les tirages sont indépendants : le résultat du second ne dépend pas de celui du premier.
Par suite, $\mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \dfrac{6}{25}$.

**Exemple** Dans le cas d'un tirage de deux boules dans la même urne que précédemment, mais sans remise, les événements $B_1$ et $R_2$ ne sont plus indépendants. En effet, $\mathbb{P}(R_2) = \dfrac{2 \times 3 + 3 \times 2}{5 \times 4} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$
Cependant, $\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \dfrac{3}{4} \neq \mathbb{P}(R_2)$.
On dit que les tirages ne sont pas indépendants : le résultat du second dépend de celui du premier.

Dans le cas de tirages indépendants, on peut faire un arbre pondéré, en donnant comme probabilité la probabilité non conditionnelle.

**Exemple** Dans une population donnée, la probabilité pour qu'un individu ait un caractère C est $\dfrac{2}{5}$.
On prend trois individus dans la population, de manière indépendante. Quelle est la probabilité que tous aient le caractère $C$ ? Quelle est la probabilité qu'au moins un individu n'ait pas le caractère $C$ ?
Pour la première question, $\mathbb{P}(\text{« les trois ont le caractère C »}) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$ (voir un arbre).
Dans la seconde question, il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement contraire du précédent :
$\mathbb{P}(\text{« au moins un des trois n'a pas le caractère C »}) = 1 - \mathbb{P}(\text{« les trois ont le caractère C »}) = \dfrac{117}{125}$.

▶ **Exercices :** 28p275-276, 29p276