Chapitre :
Exposants réels

∽

⊛ **Activité :** 1p172,173

I. Nombre x^a avec a réel

Définition On admet que, pour tout réel x strictement **positif**, la notation x^n définie pour les entiers relatifs n peut s'étendre à tout réel a. On note alors x^a.

Exemple On place pendant 5 mois une somme au taux annuel de 4%. Le coefficient multiplicateur pour l'année est $1{,}04 = 1{,}04^1 = 1{,}04^{\frac{12}{12}}$.
Si l'on ne considère que 5 mois sur l'année, le coefficient mutiplicateur est alors : $1{,}04^{\frac{5}{12}} \simeq 1{,}016$

▶ **Exercices :** 25,26,27,28p184 (applications économiques)

Propriété Toutes les propriétés connues pour des exposants entiers restent vraies pour des exposants réels :

$$x^a \times x^b = x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$
$$(xy)^a = x^a \times y^a \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

où x et y sont des nombres réels positifs et a et b sont des réels quelconques.

Exemple $4^{1,2} \times 5^{1,2} = (4 \times 5)^1{,}2 = 20^{1,2}$.

Exemple $x^{4,3} \times x^{-2,3} = x^{4,3-2,3} = x^2$.

▶ **Exercices :** 2,3,6,7p183 (formules)

II. racine n-ième

Propriété Soit x et y strictement positifs et soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$y = x^n \text{ équivaut à } x = y^{\frac{1}{n}}$$

On dit que x est la racine n-ième de y.

Preuve : Dans un sens on applique l'exposant $\frac{1}{n}$, dans l'autre on vérifie en appliquant l'exposant n.
$\square$
Ceci est par analogie avec le fait que $y = x^2$ équivaut à $x = \sqrt{y}$ (si $x > 0$).
Notation : on écrit aussi $\sqrt[n]{y}$ au lieu de $y^{\frac{1}{n}}$.

<u>**Exemple**</u> Une somme de 1 000 euros est déposée sur un compte rémunéré à un taux annuel t. Au bout de cinq ans, le capital est 1 216,65 euros. Quelle était la valeur du taux t ?
Soit x le coefficient multiplicateur associé au taux t. Alors : On a $1\,000 \times x^5 = 1\,216{,}65$.
Ainsi, $x^5 = \dfrac{1216{,}65}{1000} = 1{,}21665$.
D'après la propriété précédente on a donc $x = 1{,}21665^{\frac{1}{5}} \simeq 1{,}04$.
Or $x = 1 + t$, donc le taux vaut $t = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, soit 4%.

▶ **Exercices :** 12,13p184 (équations)

▶ **Exercices :** 19,20,21p184 (suites géométriques)

▶ **Exercices :** 29,30,31p184 (applications économiques ; recherche du taux)