LYCÉE ALFRED KASTLER **2nde**

2012–2013

Devoir maison n°11 – mathématiques

Correction

Exercice 1

Puisque Élodie part de chez elle à 10 h et rentre avant midi après être restée 1 h20 min (soit $1+\frac{20}{60}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ heures) chez sa copine, son temps de trajet total est inférieur à $12-10-\frac{4}{3}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ heures.

Soit d la distance (en kilomètres) entre les deux maisons.

À l'aller, sa vitesse moyenne est de $v_1 = 24$ km.h^{-1}, donc le temps de trajet, en heures, est $t_1=\dfrac{d}{24}$.

Au retour, sa vitesse moyenne est de $v_2 = 20$ km.h^{-1}, donc le temps de trajet, en heures, est $t_2=\dfrac{d}{20}$.

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
t_1+t_2 \leqslant \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{d}{24}+\frac{d}{20}\leqslant\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow d\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{20}\right)\leqslant\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow d\frac{5+6}{120}\leqslant\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow d\frac{11}{120}\leqslant\frac{2}{3}\\
&\Leftrightarrow d\leqslant\frac{2}{3}\times\frac{120}{11}\\
&\Leftrightarrow d\leqslant\frac{80}{11}
\end{aligned}$$

Finalement, la distance entre les deux maisons est inférieure à $\dfrac{80}{11}$ kilomètres, donc inférieure à 7,273 km.

La vitesse moyenne sur les deux trajets n'est pas $\dfrac{20+24}{2}=22$.

En effet, la distance totale parcourue est $d+d=2d$, et le temps total est t_1+t_2.

Donc la vitesse moyenne est :

$$\frac{2d}{t_1+t_2}=\frac{2}{\dfrac{t_1}{d}+\dfrac{t_2}{d}}=\frac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}=\frac{2}{\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{20}}=\frac{240}{11}\simeq 21{,}82$$

Une vitesse moyenne ne s'obtient donc pas par la moyenne « habituelle » (dite **arithmétique**).

La formule $\dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}$ donne ce que l'on appelle **la moyenne harmonique**.

Exercice 2

1. On peut établir le tableau suivant pour savoir quand A est réalisé :

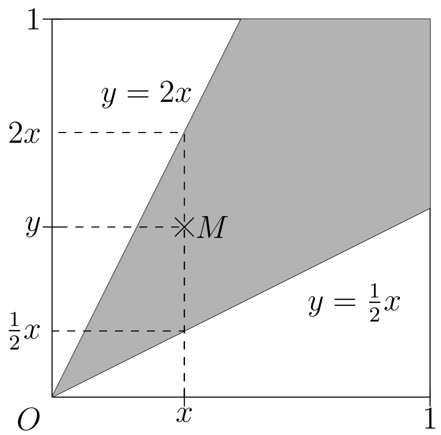
x	$\frac{1}{2}x$	$2x$	Valeurs de y telles que $\frac{1}{2}x<y<2x$
0	0	0	aucune
1	0,5	2	1
2	1	4	2 ;3
3	1,5	6	2 ;3 ;4 ;5
4	2	8	3 ;4 ;5
5	2,5	10	3 ;4 ;5

Puis celui-ci pour s'assurer de bien compter :

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5
0	X	X	X	X	X	X
1	X	O	X	X	X	X
2	X	X	O	O	X	X
3	X	X	O	O	O	O
4	X	X	X	O	O	O
5	X	X	X	O	O	O

Où les "O" correspondent aux issues qui réalisent A, et les "X" à celles qui ne réalisent pas A. Les deux dés ayant 6 faces, le nombre de couples possible est 6×6. Les dés étant équilibrés, la loi est équirépartie. Comme il y a 13 couples qui réalisent l'événement A, on a alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{36}$.

2. Dans ce cas, les deux nombres sont entre 0 et 1. Sans précision, cela signifie que ces nombres sont des nombres **réels**. On peut représenter dans un repère l'ensemble des couples $(x; y)$:
   C'est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.
   Autrement dit, c'est le carré de côté 1 représenté plus bas.
   On cherche ensuite à représenter l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ qui réalisent l'événement A. Pour un x donné, l'ensemble des y donnant un couple (x,y) qui satisfait l'événement A doit vérifier $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Autrement dit, le point $M(x; y)$ doit être situé entre les droites d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et $y = 2x$.
   L'ensemble des points $M(x; y)$ qui réalisent A est donc représenté par la partie grisée ci-dessous :



   Par suite, pour connaître la probabilité de A, comme les nombres sont pris « au hasard » (uniformément), pour connaître la probabilité de A il suffit de calculer le rapport d'aire entre la partie grisée et le carré. L'aire du carré est $1 \times 1 = 1$.
   L'aire grisée est la partie complémentaire de deux triangles (blancs) dans le carré. Or chacun des triangles (rectangles) a pour aire $\dfrac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$. Donc l'aire grisée a pour aire : $1 - 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   Finalement, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$.