**Exercice 1**
Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.
On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que les deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.
On a constaté que, chaque année :

- 5% des agents utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;
- 15% des agents utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;
- les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle $a_n$ la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010+n$, et $b_n$ la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.
En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets $A$ et $B$, et donner la matrice de transition $M$ (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4. (a) Que vaut, pour tout entier naturel $n$, la somme $a_n + b_n$ ?
   (b) On sait, pour tout entier naturel $n$, que $P_{n+1} = P_n \times M$ ; démontrer, pour tout entier naturel $n$, que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.
5. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = a_n - 0{,}75$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométriques de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.
   (b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$, puis démontrer que pour tout entier naturel $n$,
   $$a_n = -0{,}25 \times 0{,}8^n + 0{,}75.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite $(a_n)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

**Exercice 2** Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.
Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.
Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

- Lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5.
- Si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8.
- Si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.
On considère que lors du match, $n$ transformations sont tentées avec $n$ entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état : « Basile réussit sa transformation ».
Pour $n \geqslant 1$, on note :

- $p_n$ la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation.
- $q_n$ la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation.
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

**Partie A**

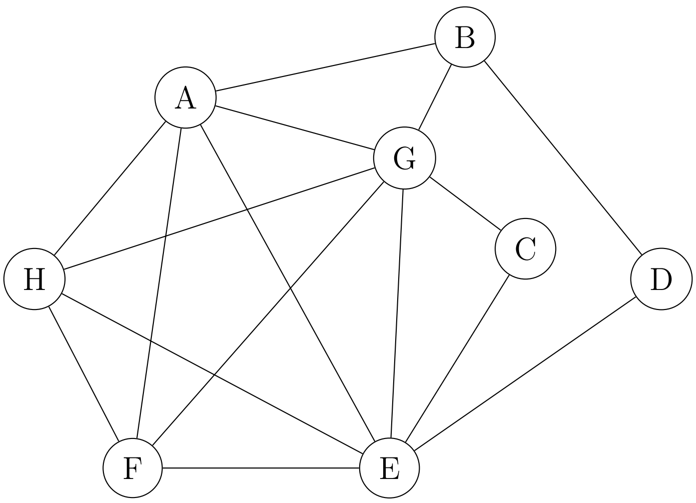
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\text{T}}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste $P_2$.

**Partie B**

1. (a) En utilisant l'égalité $P_{n+1} = P_n\text{M}$, montrer que $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}6q_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$.
2. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0{,}75$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,2.
   (b) En déduire que la suite $(p_n)$ converge et donner sa limite.
   (c) Interpréter le résultat précédent.

**Exercice 3**

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.




L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat. Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.