## Exercice 1

*Les parties A et B sont indépendantes*

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

### Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel $n$ :

$u_n$ la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013 + n$, ainsi $u_0 = 0{,}45$ ;

$v_n$ la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013 + n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner $v_0$, calculer $u_1$ et $v_1$.
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de $u_n$ et $v_n$ pour un entier naturel $n$ saisi en entrée.
   Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} = 0,75u_n + 0{,}15$. On note, pour tout nombre entier naturel $n, w_n = u_n - 0{,}6$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 0,75.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(w_n)$ ? En déduire la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

### Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de recharges en milliers | 1 | 3 | 5 |
| Coût total annuel de production en centaines d'euros | 11 | 27,4 | 83 |

Le coût total de production est modélisé par une fonction $C$ définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre $x$ désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet $(a, b, c)$ est solution du système $(S)$.

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c & = & 1 \\ 27a+9b+3c & = & 17{,}4 \\ 125a+25b+5c & = & 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où $M$ et $Y$ sont des matrices que l'on précisera.
   (b) On admet que la matrice $M$ est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a, b, c)$ solution du système $(S)$.

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

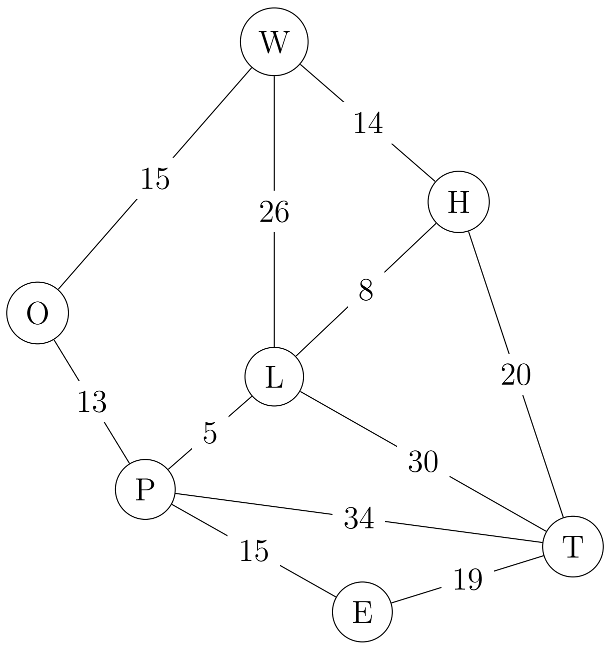
**Annexe à l'exercice 2**
Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

| | | |
|---|---|---|
| **Variables :** | $N$ est un nombre entier naturel non nul | L1 |
| | $U$ et $V$ sont des nombres réels | L2 |
| **Traitement :** | Saisir une valeur pour $N$ | L3 |
| | Affecter à $U$ la valeur 0,45 | L4 |
| | Affecter à $V$ la valeur ...... | L5 |
| | Pour $i$ allant de 1 jusqu'à $N$ | L6 |
| | \| Affecter à $U$ la valeur $0{,}9 \times U + 0{,}15 \times V$ | L7 |
| | \| Affecter à $V$ la valeur ...... | L8 |
| | Fin Pour | L9 |
| **Sortie :** | Afficher $U$ et Afficher $V$ | L10 |

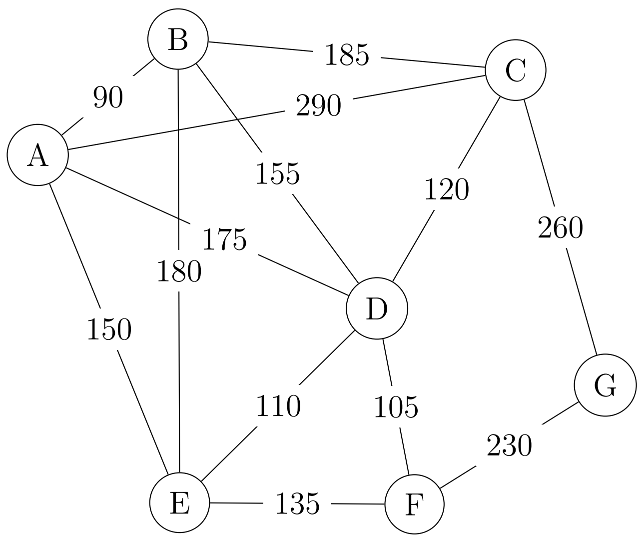
**Exercice 2** Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre $s$ de stylos et le nombre $c$ de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ et $X$ et $T$ sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

**Exercice 3 (Chaînes et cycles eulériens, Moore-Dijkstra)**
Pour chaque graphe ci-dessous, déterminer en justifiant l'existence d'une chaîne eulérienne ou d'un cycle eulérien, et en donner un exemple en cas d'existence.
Déterminer ensuite la chaîne la plus courte pour faire le trajet indiqué au bas du graphe.



de O vers T



de A vers G