# Matrices

∽

# I. Généralités

⊛ **Activité :** 1p296

**Définition** Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.
On appelle **matrice** réelle à $n$ lignes et $p$ colonnes la donnée d'un tableau rectangulaire à $n$ lignes et $p$ colonnes composé de nombres réels. Les éléments d'une matrice sont appelés **coefficients** ou **termes** de la matrice.
On dit qu'une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes est **d'ordre** $(n,p)$ ou de **dimension** $n \times p$.
L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ à coefficients réels se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -2 \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$$

la matrice $A$ est de dimension $3 \times 2$.

**Définition** Soit $A$ une matrice de dimension $n \times p$.
On note $a_{ij}$ le terme de la matrice situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ème colonne.

Matrice générale

**Exemple** Le terme $a_{2,2}$ de la matrice $A$ de l'exemple plus haut est $-2$.

**Définition (Cas particuliers)**
- Si $n = 1$ (une seule ligne) on dit que la matrice est une **matrice ligne**.
- Si $p = 1$ (une seule colonne) on dit que la matrice est une **matrice colonne**.
- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes) on dit que la matrice est une **matrice carrée**. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

**Définition (Transposée)** Soit $A$ une matrice. La matrice transposée de $A$, notée ${}^tA$, est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de $A$. Elle est donc de dimension $p \times n$.

**Exemple** La matrice transposée de $A$ donnée plus haut est

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

**Calculatrice :** On peut utiliser les matrices avec les calculatrices. Voir livre page 299.

▶ **Exercices :** 5-7,10,11p322, 18p323

**Définition (Égalité)** Deux matrices $A$ et $B$ sont égales si elles ont les mêmes dimensions et si leurs coefficients sont égaux position par position $(a_{ij} = b_{ij})$

**Exemple** Faire l'exercice 13p323

▶ **Exercices :** 14,15p323

# II. Opérations

⊛ **Activité :** 2p300 (sauf la dernière partie 8.)

**Définition (Somme)** Soit $A$ et $B$ deux matrices réelles de mêmes dimensions. On appelle somme de $A$ et $B$ la matrice notée $A+B$, de mêmes dimensions que $A$ et $B$, obtenue en ajoutant les coefficients situés en même position dans $A$ et dans $B$.

**Exemple** Somme de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Définition (Produit par un réel)** Soit $A$ une matrice et $\lambda$ un réel. On appelle produit de $A$ par le réel $\lambda$ la matrice, notée $\lambda A$, de mêmes dimensions que $A$, obtenue en multipliant tous les coefficients de $A$ par $\lambda$.
Dans le cas particulier où $\lambda = -1$, on obtient la matrice $-A$, opposée de $A$.

**Exemple** Prendre $A$ de l'exemple précédent, et multiplier par $-2$.

**Propriété** Soit $A$, $B$ et $C$ trois matrices de mêmes dimensions. Soit $k$ et $k'$ deux réels. Alors :
- $A + B = B + A$ : l'addition est commutative ;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ : l'addition est associative ;
- $k(A + B) = kA + kB$ : le produit par un réel est distributif ;
- $k(k'A) = k'(kA) = (kk')A$ : associativité mixte.

▶ **Exercices :** 21,22 (sauf 3. à moins de définir $I_n$),24,27p324

**Définition (Produit de matrices)** Soit $A$ une matrice de dimensions $n \times r$ et $B$ une matrice de dimensions $r \times p$. On appelle produit des matrices $A$ et $B$ la matrice de dimensions $n \times p$ telle que l'élément à la ligne $i$ et à la colonne $j$ est obtenue à partir de la ligne $i$ de $A$ et la colonne $j$ de $B$ comme suit :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ir} \times b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \times b_{kj}$$

**Exemple** Un produit $2 \times 3$ par $3 \times 2$

**Remarque** À cause des dimensions, si le produit $A \times B$ existe, ce n'est pas forcément le cas de $B \times A$. Et si les deux produits existent, ils ne sont en général pas égaux (voir l'exemple précédent : les dimensions ne sont même pas identiques).

▶ **Exercices :** 35,37,38,41p325

**Définition (Identité)** On appelle matrice identité de taille (ou d'ordre) $n$ la matrice carrée d'ordre $n$, notée $I_n$, dont les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à 1, et tous les autres 0.
La diagonale principale est celle qui va du coefficient $a_{11}$ au coefficient $a_{nn}$.

**Exemple**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice par $I_n$ a le même effet que multiplier un nombre par 1 :

**Propriété** Soit $n$ un entier, et $A$ et $B$ deux matrices. Si les produits suivants, existent, alors :

$$B \times I_n = B \qquad \text{et} \qquad I_n \times A = A$$

**Propriété** Soit $A$, $B$ et $C$ trois matrices. Si les opérations indiquée sont possibles alors on a :
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ : le produit se distribue à gauche sur la somme
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ : le produit se distribue à droite sur la somme
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ : le produit est associatif

**Définition (puissance)** Soit $A$ une matrice carrée de rang $n$, et soit $p$ entier non nul.
Alors $A^p$ est la matrice définie par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

▶ **Exercices :** 30p324, 31p325, 40p325 (produit et transposée)

▶ **Exercices :** 49p327 (non commutativité)

▶ **Exercice :** 55p327 (algorithmique)

▶ **Exercice :** 64,65 p328 (traduction tableaux vers matrices)

# III. Matrices inverses

⊛ **Activité :** 3p306 (parties 1 à 3 inclue)

**Définition** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. On dit que $A$ est inversible s'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que

$$A \times B = I_n$$

On admet alors que l'on a également $B \times A = I_n$.

**Propriété** Soit $A$ une matrice inversible.
Alors il existe une unique matrice $B$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
On note cette matrice $A^{-1}$ et on l'appelle matrice inverse de $A$.

**Preuve :** Soit $B$ et $C$ telles que $A \times B = A \times C = I_n = C \times A = B \times A$. Alors

$$B = B \times I_n = B \times (A \times C) = (B \times A) \times C = I_n \times C = C$$

(on a utilisé l'associativité du produit matriciel) □
On peut déterminer la matrice inverse d'une matrice $A$, quand elle existe, en résolvant un système d'équations.
La calculatrice est capable de déterminer $A^{-1}$.
Réciproquement, un système d'équations linéaires peut se ramener à la recherche d'une matrice inverse (voir page 309).

▶ **Exercices :** 66,67,69p329 (traduction sous forme matricielle).

▶ **Exercices :** 71,72,73p329 (inversion de matrice)

▶ **Exercices :** 74,75p329

▶ **Exercices :** 81,82p330 (83 en DM ?)

▶ **Exercices :** 84,85p330 (coefficients de fonctions polynomiales)