Devoir surveillé n°05 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{4}$.
2. $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{9}$.
3. Il s'agit de l'événement $\overline{A} \cap \overline{B}$.
4. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) = \dfrac{45}{48} + \dfrac{4}{48} - \dfrac{36}{48} = \dfrac{13}{48}$.

Exercice 2

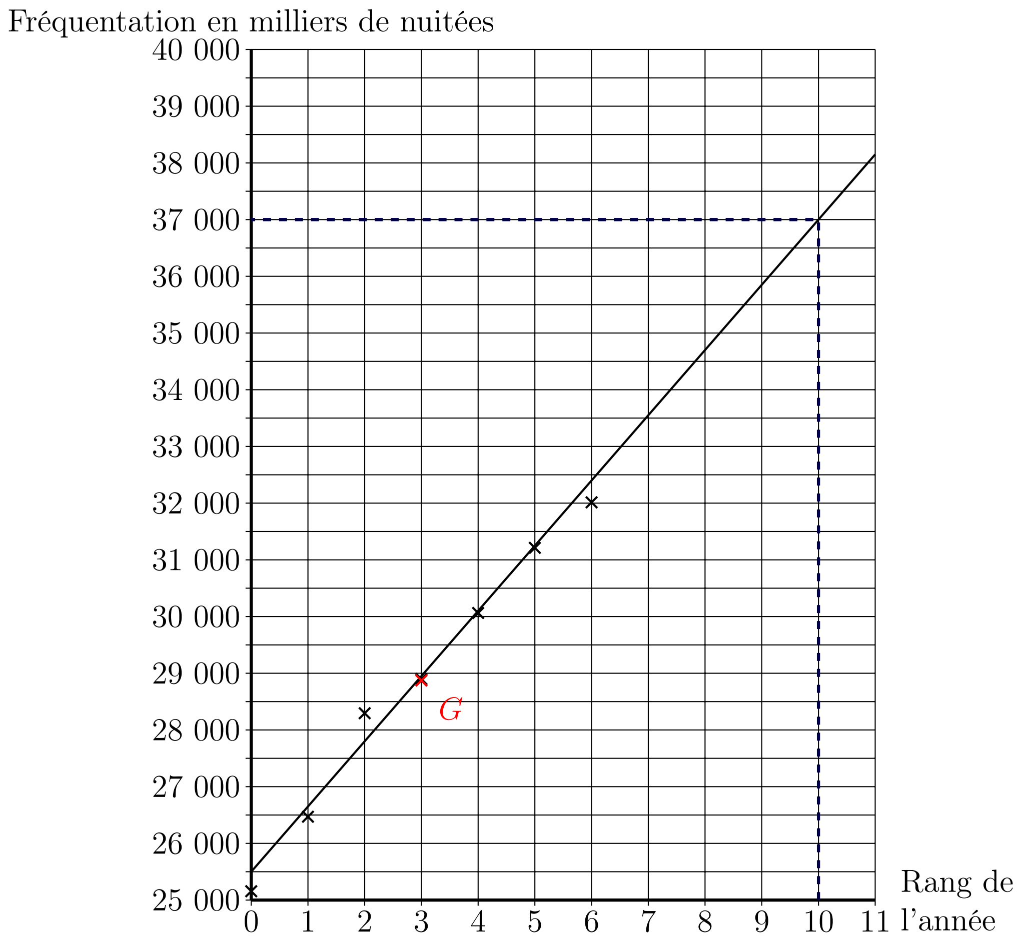
PARTIE A

1. On calcule : $\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = 3$ et
   $\overline{y} = \dfrac{25\ 156 + 26\ 470 + 28\ 295 + 28\ 897 + 30\ 063 + 31\ 212 + 32\ 014}{7} = \dfrac{202\ 107}{7} \simeq 28\ 872$.
   Donc le point moyen G a pour coordonnées $(3; 28\ 872)$.
2. Les points semblent à peu près alignés, un ajustement affine semble donc justifié.
3. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1\ 136{,}6x + 25\ 462{,}5$.
4. On décide d'ajuster le nuage avec la droite (D) d'équation $y = 1\ 150x + 25\ 500$.
   (a) La droite est tracée sur la graphique plus bas.
   (b) En 2014, le rang de l'année est 10. L'ordonnée du point de (D) d'abscisse 10 est 37 000.
   En 2014, le nombre de nuitées prévu par ce modèle d'ajustement en 2014 est de 37 000.
   (c) Calculons le nombre de nuitées prévu par ce modèle d'ajustement en 2014. Remplaçons dans l'équation de (D), x par 10. $y = 1\ 150 \times 10 + 25\ 500 = 37\ 000$.
   Nous retrouvons bien le résultat précédent.

PARTIE B

1. En 2007 l'indice est $\dfrac{28\ 897}{25156} \times 100 \simeq 114{,}87$.
2. Calculons le taux global d'augmentation de la fréquentation des campings 4 étoiles ou plus entre 2004 et 2010.
   Le taux est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.
   Si l'on appelle T le taux global d'évolution, $T = \dfrac{32\ 014 - 25\ 156}{25\ 156} \simeq 0.272\ 6$.
   Le taux global d'augmentation entre 2004 et 2010 est d'environ 27,26%.

   Remarque On peut utiliser l'indice de fréquentation pour 2010 qui est 127,26. Par suite le taux d'évolution global entre 2004 et 2010 est $(127{,}26 - 100)$ soit 27,26%.



Exercice 3

PARTIE A

1. On calcule $C(10) = 10^2 + 50 \times 10 + 100 = 700$.
   Le coût de fabrication de 10 tables est de 700€.
2. Le coût unitaire est donc : $\dfrac{C(10)}{10} = \dfrac{700}{10} = 70$€.

PARTIE B

Pour les réponses suivantes, voir plus bas les lectures graphiques

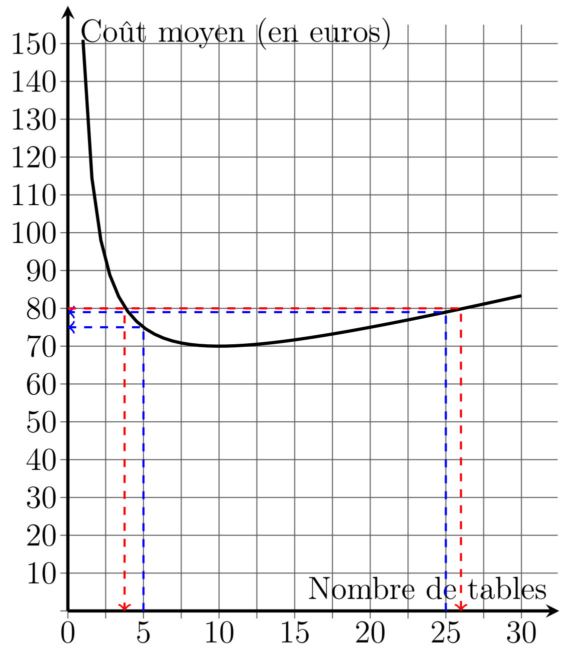
1. (En bleu) on peut lire $f(5) \simeq 75$ et $f(25) \simeq 79$.
2. (En rouge) on peut observer que le coût est inférieur ou égal à 80 pour $x \in [4; 26]$.

PARTIE C

1. On a $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 50x + 100}{x} = x + 50 + \dfrac{100}{x}$.
2. On dérive : $f'(x) = 1 + 100 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{100}{x^2}$.
   Par suite, $\dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 10^2}{x^2} = 1 - \dfrac{100}{x^2} = f'(x)$.
3. On a $x - 10 > 0 \Leftrightarrow x > 10$, et $x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -10$.
   De plus, x^2 est toujours positif (c'est un carré).
   Par conséquent, le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	1	10	30
$x - 10$	$-$	0	$+$
$x + 10$	$+$		$+$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$

4. Le minimum de f est atteint en $x = 10$. Le coût unitaire est donc minimal pour la fabrication de 10 tables. Ce coût est alors de $f(10) = 70$€ (comme calculé précédemment).



Exercice 4

PARTIE A

1. Puisque l'amende augmente de 6 000€ chaque année, on a $C_2 = C_1 + 6\ 000 = 89\ 000$, puis $C_3 = C_2 + 6\ 000 = 95\ 000$, qui correspondent respectivement aux amendes payées en 2002 et en 2003.
2. De manière générale, on a $C_{n+1} = C_n + 6\ 000$, donc la suite est arithmétique.
3. On a alors $C_n = C_1 + (n-1) \times 6\ 000 = 83\ 000 + (n-1) \times 6\ 000$. Le rang de l'année 2015 est 15, donc on calcule : $C_{15} = 83\ 000 + 14 \times 6\ 000 = 167\ 000$. En 2015, l'amende sera alors de 167 000€.

PARTIE B

1. On fait ici une réduction de 4%, ce qui revient à multiplier par 0,96. Autrement dit, $Q_{n+1} = Q_n \times 0{,}96$: la suite est géométrique.
2. On calcule $Q_1 = Q_0 \times 0{,}96 = 68\ 000 \times 0{,}96 = 65\ 280$. Si le rejet en 2005 est de 66 000 tonnes, alors le groupe n'a pas respecté son engagement.
3. (a) L'algorithme complet est le suivant :

```
Variables :
    Q, i, A
Traitement :
    i prend la valeur 0
    Q prend la valeur 68 000
    Tant que Q > 42 000 Faire
    |  Q prend la valeur Q × 0,96
    |  i prend la valeur i + 1
    FinTant
    Afficher i
```

(b) On calcule les termes successifs de la suite, tant que leur valeur est supérieure à 42 000 :

- $Q_0 = 68\ 000$
- $Q_1 = 65\ 280$
- $Q_2 \simeq 62\ 669$
- $Q_3 \simeq 60\ 162$
- $Q_4 \simeq 57\ 756$
- $Q_5 \simeq 55\ 446$
- $Q_6 \simeq 53\ 228$
- $Q_7 \simeq 51\ 099$
- $Q_8 \simeq 49\ 055$
- $Q_9 \simeq 47\ 093$
- $Q_{10} \simeq 45\ 209$
- $Q_{11} \simeq 43\ 401$
- $Q_{12} \simeq 41\ 665$

L'année de rang 12 est $2004 + 12 = 2016$. L'ojectif ne pourra donc pas être atteint.