Devoir surveillé n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.
2. On a en développant : $(3x - 9)(x + 5) = 3x^2 + 15x - 9x - 45 = 3x^2 + 6x - 45 = f'(x)$.
3. $f'(x) = (3x - 9)(x + 5)$ est sous forme d'un produit.
   On résout : $3x - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ (on a divisé par $3 > 0$) et $x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$. Par suite :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
signe de $3x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On a alors :

x	0		3		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	7	$\searrow$	-74	$\nearrow$	-61

5. Le maximum de f sur $[0; 4]$ est donc 7 (il est atteint en 0).
6. L'équation est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(2) = -21$.
   Par suite, l'ordonnée de A est $f(2) = -63$, donc $-63 = -21 \times 2 + p \Leftrightarrow p = -21$.
   Finalement, la tangente a pour équation $y = -21x - 21$.

Exercice 2

1. On a $f'(x) = 1x^4 - 3x^2 - 4x = x(x^3 - 3x - 4)$.
2. On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
   Comme $\Delta > 0$, l'expression admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{2 \times 1} = 4$$

3. Pour dresser le tableau de variation de f, il ne faut pas oublier x, car $f'(x) = x(x^3 - 3x - 4)$.
   On justifie le signe de $x^3 - 3x - 4$ en précisant que $a = 1 > 0$.

x	-2		-1		0		4		5
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x^3 - 3x - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	9	$\searrow$	$4{,}25$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$-13{,}75$

4. On observe alors que le minimum de f sur $[-2;5]$ est -27.

Exercice 3

1. Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{4} \times x + 1 + 4 \times \dfrac{1}{x}$.
   Par suite, $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 1 + 0 + 4 \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{x^2}$.
   Or, $\dfrac{x^2 - 16}{4x^2} = \dfrac{x^2}{4x^2} - \dfrac{16}{4x^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{x^2} = f'(x)$.
2. On peut calculer Δ puis calculer les racines.
   Sinon, on peut voir que $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.
   Comme $a = 1 > 0$, on a :

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
signe de $x^2 - 16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On a (x^2 est un carré donc toujours positif) :

x	1		4		20
Signe de x^2		$+$		$+$	
Signe de $x^2 - 16$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	5,25	↘	3	↗	6,2

4. Ainsi le minimum de f sur $[1;20]$ est 3, le maximum étant 6,2.