

Chapitre : Dérivation



I. Fonctions polynomiales

⊗ **Activité** : 1p70 (recherche de formule pour x^n)

1. Dérivées

Propriété (Dérivée d'une fonction constante)

Soit k un nombre réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.

Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 0$.

Propriété (Dérivée de la fonction $x \mapsto x$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 1$.

Propriété (Dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.

Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = nx^{n-1}$.

On a donc le tableau suivant :

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
$\dots$	$\dots$
x^n	nx^{n-1}
$\dots$	$\dots$

► **Exercices** : 1,2p78 et 38p80

⊗ **Activité** : 2p70 (opérations)

Propriété (Dérivation de ku)

Soit k un nombre réel et u une fonction.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ku(x)$.

Alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = ku'(x)$.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3$. Alors $f(x) = ku(x)$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.
Comme $u'(x) = 3x^2$, alors $f'(x) = 5 \times 3x^2$.

Propriété (Dérivation de $u + v$)

Soit u et v deux fonctions.

Soit f la fonction définie par $f(x) = u(x) + v(x)$.

Alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemple Soit $f(x) = x^3 + x^2$. Alors $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2$.

Comme $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x$, alors $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

À l'aide de toutes les propriétés précédentes, on peut alors déterminer la fonction dérivée de toute fonction polynomiale.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x$.

Alors $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 7 \times (2x) + 3 \times (1) = 15x^2 + 14x + 3$

► **Exercices** : 3,4,6p78 et 39,40,41p80 (produit par un réel)

► **Exercices** : 8,9,10p78 et 42p80 (somme)

► **Exercices** : 43,44,45,46,51p80 (diverses fonctions)

2. Tangente

⊗ **Activité** : 4p74 (en salle informatique ou avec les netbooks)

Définition Soit f une fonction polynôme définie sur un intervalle I .

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f . Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_A .

On appelle **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A** la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(x_A)$.

Exemple Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.

Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x_A = 3$, on calcule tout d'abord $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 \times (2x) - 2 \times (1) + 0 = 6x - 2.$$

Le coefficient directeur de la tangente est donc $f'(x_A) = f'(3) = 6 \times 3 - 2 = 18 - 2 = 16$.

L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$, m étant le coefficient directeur.

Donc on a $y = 16x + p$.

Il reste à déterminer p . Pour cela on utilise le fait que la tangente passe par le point A .

Autrement dit, on a $y_A = 16x_A + p$.

Or $x_A = 3$, donc $y_A = f(x_A) = 3 \times (3^2) - 2 \times 3 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$.

Par suite, $22 = 16 \times 3 + p$, donc $22 = 48 + p$, puis $p = 22 - 48 = -26$.

Finalement, la tangente a pour équation $y = 16x - 26$.

► **Exercices** : 84p83 (seulement le nombre dérivé)

► **Exercices** : 86,87,88p83

► **Exercices** : 90,91p83 (lectures graphiques), 92p84

II. Fonctions rationnelles

⊗ **Activité** : QCM 6,7,8 page 96 (transformation d'expressions)

1. Fonction inverse

Propriété | La fonction dérivée de la fonction inverse définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est la fonction f' définie sur le même ensemble par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Exemple Soit $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$. Alors $f'(x) = 0 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

► **Exercices** : 1,2,3,4,6,8p102

► **Exercices** : 36,38p104

2. Quotient de fonctions

⊗ **Activité** : 2p98 : la dérivée de $\frac{u}{v}$ n'est pas $\frac{u'}{v'}$!

Propriété | Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I , ayant pour dérivées respectivement u' et v' . On suppose que quelque soit $x \in I$, $u(x) \neq 0$.

On pose $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Alors la dérivée f' de f est définie sur I par : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

On peut écrire :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple Soit $f(x) = \frac{5x^2 + 2}{3x - 1}$, définie sur $[1; 10]$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x^2 + 2$ et $v(x) = 3x - 1$.

On a alors $u'(x) = 10x$ et $v'(x) = 3$.

Par suite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{10x \times (3x - 1) - (5x^2 + 2) \times 3}{(3x - 1)^2} \\ &= \frac{30x^2 - 10x - 15x^2 - 6}{(3x - 1)^2} = \frac{15x^2 - 10x - 6}{(3x - 1)^2} \end{aligned}$$

► **Exercices** : 11,12,13,14,... p102

► **Exercices** : 44,45,50,51p105

3. Tangentes

Définition De même que pour les fonctions polynomiales,

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f . Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_A .

On appelle **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A** la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(x_A)$.

► Exercice : 26p103

► Exercices : 72,73p108, 74,76p109

► Exercice : (en DM ?) 78p109

III. Application à l'étude des variations

⊗ **Activité** : 3p74 (en salle informatique)

Propriété | Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I .

Exemple (exercice 70p81)

Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2$. Alors $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, polynomiale de degré 3, il faut parvenir à la factoriser.

On pourra alors faire un tableau de signe. Or $f'(x) = x(x^2 - 3x - 10)$.

Il suffit maintenant d'étudier le signe de $x^2 - 3x - 10$, polynomiale de degré 2.

Pour cela on calcule : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0$.

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 7}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

Par suite, comme $a = 1 > 0$ on a :

x	$-\infty$	-2	0	5	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 3x - 10$	$+$	0	$-$	0	$+$
signe de $f'(x)$	$-$	0	0	$-$	$+$
Variations de f					

► **Exercices** : 23,24p78, 62p81 (polynomiales de degré 2)

► **Exercices** : 26,27p78, 64,66,68p81 (polynomiales de degré 3)

► **Exercices** : 71p81 (polynomiale de degré 4)

► **Exercice** : (DM) 80p82 (polynomiale de degré 3 et extremum)

► **Exercices** : 21,22,25p103 (fonction rationnelle)

► **Exercices** : 55,56p106, 60,62p107 (autres fonctions rationnelles)

► **Exercice** : (DM) 79p109 (rationnelle et extremum)