

## Lecture méthodologique d'exercices



Pour chaque exercice de type bac suivant :

- lire au préalable l'ensemble des questions avant de commencer à écrire quoi que ce soit ;
- Pour chaque question :
  - ★ indiquer les méthodes à appliquer (sans les appliquer), ou le début du raisonnement ;
  - ★ estimer, si possible et si cela est pertinent, la réponse à obtenir.

Une fois ainsi traité l'ensemble des exercices, on pourra les résoudre en détail.

**Exercice 1** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et telle que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. (a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < u_n$ .
2. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < 1$ .  
(a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
(b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.
3. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$ .  
(a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3.  
(b) Exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
(c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ .  
(d) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 2** On considère la suite  $(z_n)$  à termes complexes définie par  $z_0 = 1 + i$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $z_n = a_n + ib_n$ , où  $a_n$  est la partie réelle de  $z_n$  et  $b_n$  est la partie imaginaire de  $z_n$ .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

**Partie A**

1. Donner  $a_0$  et  $b_0$ .
2. Calculer  $z_1$ , puis en déduire que  $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$  et  $b_1 = \frac{1}{3}$ .
3. On considère l'algorithme suivant :

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Variables : $A$ et $B$ des nombres réels<br>$K$ et $N$ des nombres entiers<br>Initialisation : Affecter à $A$ la valeur 1<br>Affecter à $B$ la valeur 1<br>Traitement :<br>Entrer la valeur de $N$<br>Pour $K$ variant de 1 à $N$<br>Affecter à $A$ la valeur $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$<br>Affecter à $B$ la valeur $\frac{B}{3}$<br>FinPour<br>Afficher $A$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- (a) On exécute cet algorithme en saisissant  $N = 2$ . Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à  $10^{-4}$  près).

| $K$ | $A$ | $B$ |
|-----|-----|-----|
| 1   |     |     |
| 2   |     |     |

- (b) Pour un nombre  $N$  donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

## Partie B

- Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .  
En déduire l'expression de  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ , et l'expression de  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .
- Quelle est la nature de la suite  $(b_n)$  ? En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ , et déterminer la limite de  $(b_n)$ .
- (a) On rappelle que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}.$$

- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .  
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

- (c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|a_n| \leq u_n$ . En déduire que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.