LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2013–2014

Devoir maison n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1.
   (a) $u_2 = u_1 + \dfrac{5}{100} \times u_1 + 20 = u_1 + 0{,}05u_1 + 20 = 100 + 0{,}05 \times 100 + 20 = 100 + 5 + 20 = 125$.

   (b) u_{n+1} est le montant versé le $(n+1)$-ième jour. La veille le montant était u_n. Pour déterminer u_{n+1}, il faut donc faire une augmentation de 5% de u_n, puis ajouter 20. Ainsi :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n + 20 = (1 + 0{,}05)u_n + 20 = 1{,}05 \times u_n + 20$$

2.
   (a) $v_1 = u_1 + 400 = 100 + 400 = 500$.

   (b) On exprime (méthode à connaître, c'est toujours la même chose) :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} + 400}{u_n + 400} && \text{(on remplace avec la définition de } v\text{)}\\
&= \frac{1{,}05u_n + 20 + 400}{u_n + 400} && \text{(on utilise la définition par récurrence de } u_{n+1}\text{)}\\
&= \frac{1{,}05u_n + 420}{u_n + 400} \\
&= \frac{1{,}05\left(u_n + \dfrac{420}{1{,}05}\right)}{u_n + 400} && \text{(on factorise par la constante devant } u_n\text{)}\\
&= \frac{1{,}05(u_n + 400)}{u_n + 400} && \text{(en simplifiant on voit un facteur commun)}\\
&= 1{,}05
\end{aligned}$$

   On obtient une constante. Ainsi, v est géométrique de raison 1,05.

   (c) On sait que, pour $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ (la suite a pour premier terme v_1) avec $v_1 = 500$ et $q = 1{,}05$.
   Ainsi, $v_n = 500 \times 1{,}05^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

   (d) Comme $v_n = u_n + 400$, on a $u_n = v_n - 400 = 500 \times 1{,}05^{n-1} - 400$.

3. L'algorithme en langage pseudo-algorithmique :

```
Variables
    S, n, A
Traitement
    Saisir A
    n prend la valeur 1
    S prend la valeur 500 × 1,05^(n−1) − 400
    Tant que S ⩽ A Faire
        | n prend la valeur n + 1
        | S prend la valeur S + 500 × 1,05^(n−1) − 400
    FinTant
Sortie
    Afficher n
```

4. En fait, $w = u$. Donc $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_n$ représente la comme totale reçue au bout de n jours.

   On cherche alors quand $S_n \geqslant 10\ 000$. On applique l'algorithme ci-dessus avec $A = 10\ 000$ (rigoureusement on devrait changer $S \leqslant A$ par $S < A$, mais ça n'a pas d'incidence ici). La réponse donnée est alors 22 jours.

5. $\sum_{i=1}^{n} v_i$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} v_i = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} &= v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\
&= 500 \times \frac{1 - 1{,}05^n}{1 - 1{,}05} \\
&= 500 \times \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05} \\
&= 10\ 000(1{,}05^n - 1)
\end{aligned}$$