LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2013–2014

Devoir maison n°03 – mathématiques

Correction

Exercice 1

Soit u une suite qui converge vers 1.

> On sait alors que quelque soit $a > 0$, il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $1 - a < u_n < 1 + a$.
> Il suffit de bien choisir a pour être certain d'avoir $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

On pose (par exemple) $a = 0{,}5$. Alors il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $1 - 0{,}5 < u_n < 1 + 0{,}5$, soit $0{,}5 < u_n < 1{,}5$.
Autrement dit, pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n > 0{,}5$, soit $u_n \geqslant 0$.
On pourrait choisir, au pire, $a = 1$.

Exercice 2 Soit u et v les suites définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{3 + \sin(n)}{n}$ et $v_n = (-1)^n\sqrt{n}$.

1. Les termes de la suite sont alternativement négatifs puis positifs à cause de $(-1)^n$,. D'autre part leur valeur absolue, $\sqrt{n}$, tend vers $+\infty$. Ainsi les termes de la suite alternent, à mesure que n augmente, entre de grandes valeurs négatives et de grandes valeurs positives.

   La suite ne converge donc pas, et n'a pas de limite.
2. On encadre les termes de la suite de la manière suivante : Pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \leqslant 3 + \sin(n) \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{n} \leqslant \frac{3 + \sin(n)}{n} \leqslant \frac{4}{n} \qquad (n > 0) \end{aligned}$$
   Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{4}{n} = 0$.
   Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. On exprime d'abord : $w_n = u_n v_n = \dfrac{3 + \sin(n)}{n} \times (-1)^n\sqrt{n} = \dfrac{(-1)^n(3 + \sin(n))}{\sqrt{n}}$.
   On encadre là encore les termes de la suite w_n.
   On sait déjà que $2 \leqslant 3 + \sin(n)$, ce qui signifie que $3 + \sin(n) > 0$. Par suite :
$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1(3 + \sin(n)) \leqslant (-1)^n(3 + \sin(n)) \leqslant (3 + \sin(n)) \quad (I)$$
   Or on sait que $3 + \sin(n) \leqslant 4$, donc $-4 \leqslant -(3 + \sin(n))$, et
$$\begin{aligned} I \quad &\Leftrightarrow \quad -4 \leqslant (-1)^n(3 + \sin(n)) \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{(-1)^n(3 + \sin(n))}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{n}} \qquad (\sqrt{n} > 0) \end{aligned}$$
   Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{n}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$.
   Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.