Devoir maison n°04 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

   On démontre ici que, quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ par récurrence.

   Il suffit pour le DM de faire seulement l'étape de récurrence.

   - **Initialisation** : Soit $n_0 = 1$. On a $\mathcal{P}(1)$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{1+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^1}\right)$.

     Or d'une part $\displaystyle\sum_{k=2}^{1+1} \frac{1}{10^k} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$. Et d'autre part :

     $\displaystyle\frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^1}\right) = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{90}\left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{9 \times 10} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{100}$.

     Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - **Étape de récurrence :** On suppose que, pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

     On démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right)$.

     Or,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{10^k} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{n+2}} \\
&= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) + \frac{1}{10^{n+2}} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n} + \frac{90}{10^{n+2}}\right) \\
&= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{10^2}{10^{n+2}} + \frac{90}{10^{n+2}}\right) \\
&= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{10}{10^{n+2}}\right) && (-10^2 + 90 = -100 + 90 = -10) \\
&= \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

     Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** Grâce au principe de récurrence on peut affirmer que quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire que

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

2. On démontre tout d'abord que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$, et cela par récurrence.

   Soit donc $\mathcal{Q}(n) : v_n = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$.

   - Soit $n_0 = 1$, on a $\mathcal{Q}(1) : v_1 = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{1+1} \frac{1}{10^k}$.

     Or $v_1 = 1{,}27$, et $1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{1+1} \frac{1}{10^k} = 1{,}2 + 7 \times \left(\frac{1}{10^2}\right) = 1{,}2 + \frac{7}{100} = 1{,}2 + 0{,}07 = 1{,}27$.

     Par conséquent, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
   - On suppose que pour un entier $n \geqslant 1$ fixé $\mathcal{Q}(n)$ est vraie,

     autrement dit que : $v_n = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$.

     On démontre que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie, soit que $v_{n+1} = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{10^k}$.

     Or,

$$\begin{array}{rcll} v_{n+1} & = & v_n + \dfrac{7}{10^{n+2}} & \text{par définition} \\ & = & 1{,}2 + 7 \times \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}\right) + \dfrac{7}{10^{n+2}} & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & 1{,}2 + 7 \times \left(\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}\right) + \dfrac{1}{10^{n+2}}\right) & \\ & = & 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{10^k} & \end{array}$$

     Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** Grâce au principe de récurrence on peut affirmer que quelque soit $n \geqslant 1$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, c'est à dire que $v_n = 1{,}2 + 7 \times \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k}$

   D'après la question précédente, on peut alors affirmer que

$$v_n = 1{,}2 + 7 \times \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = 1{,}2 + 7 \times \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1{,}2 + \frac{7}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 10^n = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 1{,}2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{108}{90} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90}$.

Exercice 2

Partie 1

On rappelle que la calculatrice peut donner directement la valeur de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et de $\mathbb{P}(X = k)$; voir page 412 (TI) ou 417 (Casio).

1. On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geqslant 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}0009 \simeq 0{,}9991$.
   et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X < 8) = \mathbb{P}(X \leqslant 7) \simeq 0{,}3222$.

2. L'événement $A \cap B$ correspond à « $X \geqslant 4$ et $X < 8$ », soit simplement à « $4 \leqslant X \leqslant 7$ ».
   Par suite, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 7) = \mathbb{P}(X \leqslant 7) - \mathbb{P}(X \leqslant 3) \simeq 0{,}3222 - 0{,}0009 \simeq 0{,}3213$.
3. On utilise les formules : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} \simeq \dfrac{0{,}3213}{0{,}3222} \simeq 0{,}9972$.

   De même, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \simeq \dfrac{0{,}3213}{0{,}9991} \simeq 0{,}3216$.

Partie 2 - Restitution organisée des connaissances (ROC)

1. D'après la formule des probabilités totales, on sait que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
   Il suffit alors de soustraire $\mathbb{P}(A \cap B)$ dans les deux membres pour obtenir :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

2. (a) Comme A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
   Par conséquent, en partant de l'égalité donnée ci-dessus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) \times (1 - \mathbb{P}(B)) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) \end{aligned}$$

   D'après la propriété de cours, on a bien démontré que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

   (b) En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, on calcule :
   $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) \times (1 - \mathbb{P}(B)) = 0{,}4 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.
   Par suite, $\overline{A} \cup B$ est l'événement contraire de $A \cap \overline{B}$.
   En effet, $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$.
   Donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$.