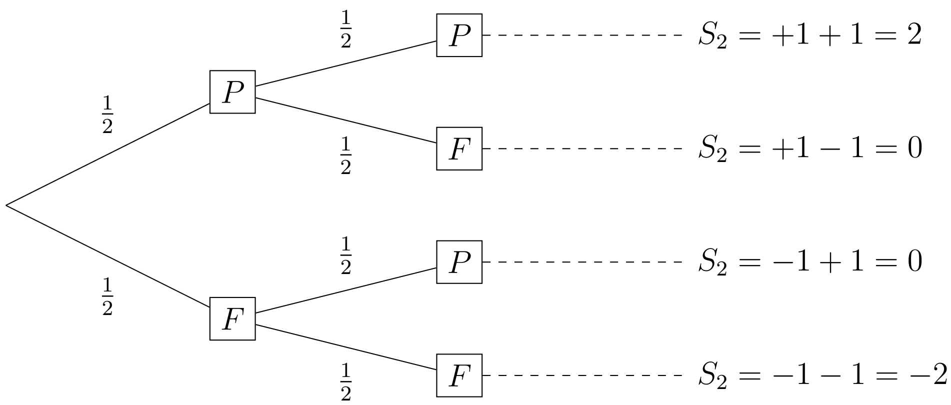
LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2013–2014

Devoir maison n°05 – mathématiques
Correction

Exercice 1
Partie A :

1. (a) Si un seul déplacement est fait, alors les seules valeurs possible pour S_1 sont $+1$ et -1.
   (b) Par conséquent, $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(S_1 = 0) = 0$, l'événement n'étant pas réalisable.
2. (a) Pour déterminer la loi de probabilité de S_2 pour un trajet de deux déplacements, on forme l'arbre suivant, sachant que la pièce est équilibrée et que les déplacements sont indépendants :



Par suite, on obtient le tableau suivant, qui présente la loi de S_2 :

x	-2	0	2
$\mathbb{P}(S_2 = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Calcul de $\mathbb{P}(S_2 = 0)$: $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ (il y a en effet deux branches qui donnent $S_2 = 0$).

   (b) On a, d'après la question précédente, $\mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(S_2 = 0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) L'algorithme permettant d'obtenir une simulation d'un nombre T de trajets du pion, T étant donné par l'utilisateur, et de calculer la fréquence de l'événement D_n est donné sur la page suivante.
   L'idée principale est de faire en boucle, T fois, les opérations de l'algorithme donné dans l'énoncé. On compte alors le nombre C de réalisations de D_n, puis on divise ce nombre C par T pour avoir la fréquence de l'événement, que l'on affiche.
   (b) Dans le cas où l'on donne $N = 3$ ou $N = 5$, on obtient toujours 0.
   (c) En fait, dès que N est impair, on obtiendra toujours 0, car il est impossible en un nombre impair de déplacements de revenir au départ. Il faudrait en effet autant de déplacements vers la gauche que vers la droite, ce qui en impose un nombre pair.

Partie B :

1. Lorsque le pion effectue un trajet de 2 déplacements, on peut obtenir le tableau suivant lorsque l'on applique l'algorithme (avec $N = 2$ et T donné dans le tableau) :

Nombre T	100	500	1 000	5 000
Fréquence de D_2	0,41	0,496	0,489	0,509

2. Les fréquences obtenues sont assez proches de la probabilité de D_2 donnée précédemment, à savoir $\frac{1}{2}$. En principe, plus T est grand, plus les écarts autour de 0,5 sont faibles. Voir à ce propos les intervalles de fluctuation (vus en seconde, puis en première, et encore en terminale).
3. En appliquant l'algorithme avec un grand nombre T (par exemple 5 000), on peut obtenir le tableau suivant :

Nombre n	10	50	100	1 000
Fréquence de D_n	0,244	0,1106	0,083	0,0234

On peut donc conjecturer que la suite $(\mathbb{P}(D_{2k}))_{k\geqslant 1}$ est décroissante et que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(D_{2k}) = 0$.

Voici l'algorithme annoncé plus haut :

Variables
- T, nombre de trajets
- C, compte des réalisations de D_n
- D, fréquence de l'événement D_n
- N, nombre de déplacements du pion
- S, somme des déplacements du trajet
- A, I, J nombres entiers

Entrée
- Saisir T
- Saisir N

Traitement

```
C prend la valeur 0
Pour J allant de 1 à T Faire
    S prend la valeur 0
    Pour I allant de 1 à N Faire
        A prend la valeur alea_ent(0,1)
        Si A = 1 Alors
            S prend la valeur S + 1
        Sinon
            S prend la valeur S − 1
        FinSi
    FinPour
    Si S = 0 Alors
        C prend la valeur C + 1
    FinSi
FinPour
D prend la valeur C/T
```

Sortie
- Afficher D