Devoir maison n°06 – mathématiques
Donné le 06/11/2013 – à rendre le 13/11/2013

Exercice 1
On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = u_n + 2n + 3 \quad (n \geqslant 0) \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite u.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite u ?

Exercice 2

1. **Rappel de première**.
   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.
   Expliquer pourquoi la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
2. On cherche ici une fonction f, strictement positive, croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé possède la propriété suivante :

   « Pour tout point M de la courbe, si P est le point d'intersection de la tangente T en M avec l'axe des abscisses et H est le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à 1. »

   La longueur PH est appelée *sous-tangente* en M à $\mathscr{C}$.
   La fonction f cherchée a donc une courbe à sous-tangente constante (égale à 1).
   (a) Faire une figure représentant la situation décrite par la propriété.
   (b) On note a l'abscisse d'un point quelconque M de $\mathscr{C}$.
   En utilisant la question précédente, démontrer que l'abscisse de P est alors égale à $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.
   (c) En déduire que la fonction f recherchée vérifie l'égalité $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| = 1$.
   (d) En déduire que f vérifie l'égalité $f' = f$.
   (e) Donner alors deux exemples de fonction f qui satisfont la propriété.