Devoir maison n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On exprime, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3$. Or $n \geqslant 0$, donc $2n \geqslant 0$ puis $2n + 3 \geqslant 3 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui permet d'affirmer que u est strictement croissante.

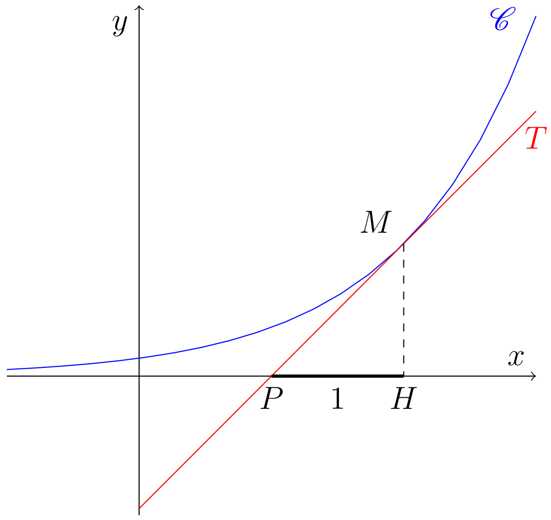
2. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > n^2$ ». On souhaite démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Nous le faisons par récurrence.
   - **Initialisation :**
     $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$, donc $u_0 > 0^2$. Autrement dit, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Étape de récurrence :**
     On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $u_n > n^2$.
     Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $u_{n+1} > (n+1)^2$.
     Par définition, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > n^2$.
     Par suite :
     $$\begin{array}{lll} u_{n+1} & > n^2 + 2n + 3 & \\ & > n^2 + 2n + 1 + 2 & \\ & > (n+1)^2 + 2 & \text{(identité remarquable)} \\ & > (n+1)^2 & \text{(car } 2 > 0\text{)} \end{array}$$
     $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :**
     Grâce au principe de récurrence on a démontré que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $u_n > n^2$.

   (b) Comme nous venons de le démontrer, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
   De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2

1. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a une équation de la forme $y = mx + p$, et son coefficient directeur est le nombre dérivé de f en a, autrement dit $f'(a)$. Ainsi $m = f'(a)$, et l'équation est de la forme :
   $$y = f'(a)x + p$$
   Il reste à déterminer p. Pour cela, on utilise le fait que la tangente passe par le point de la courbe d'abscisse a, dont les coordonnées sont $(a; f(a))$. Cela signifie que ces coordonnées satisfont l'équation, autrement dit que :
   $$f(a) = f'(a) \times a + p$$
   On trouve alors que $p = f(a) - f'(a) \times a$. Par suite, l'équation de la tangente est :
   $$\begin{array}{rcl} y & = & f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ & = & f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ & = & f'(a)(x-a) + f(a) \end{array}$$

2. (a) La situation est la suivante :



(b) On sait que l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Le point P appartient à cette tangente donc ses coordonnées satisfont l'équation. On sait de plus que P est sur l'axe des abscisses, donc a pour ordonnée $y_P = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 = f'(a)(x_P - a) + f(a) \quad &\Leftrightarrow \quad -f(a) = f'(a)(x_P - a) \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{f(a)}{f'(a)} = x_P - a \quad (\star) \\ &\Leftrightarrow \quad a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x_P \end{aligned}$$

$(\star)$ on a $f'(a) \neq 0$, sans quoi la tangente n'intersecte pas l'axe des abscisses.

Ainsi on a bien $x_P = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

(c) On a $H(a;0)$ et $P\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}; 0\right)$. Puisque $PH = 1$, cela signifie que $PH^2 = 1$, soit que :

$$(x_H - x_P)^2 + (y_H - y_P)^2 = \left(a - a + \frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 + (0-0)^2 = 1$$

Autrement dit

$$\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 = 1$$

Soit

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = 1$$

(d) Puisque f est strictement positive et que f' est strictement positive également (car f est croissante), on a $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| = \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. Donc, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(a)}{f'(a)} = 1$, soit $f(a) = f'(a)$. Autrement dit, $f = f'$.

(e) Le premier exemple est la fonction exponentielle : $x \mapsto e^x$.
Mais on peut donner aussi $x \mapsto e^{x+k}$ ($k \in \mathbb{R}$ constante) ou $x \mapsto Ce^x$ ($C \in]0; +\infty[$).
Ces deux exemples reviennent en fait au même puisque quelque soit $C > 0$ il existe un réel k tel que $C = e^k$.

Remarque Si on ne suppose pas f strictement croissante, on a la possibilité d'avoir $f' = -f$. Un exemple est alors $x \mapsto e^{-x}$.