Devoir maison n°07 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On calcule simplement :

$$z_{A'} = f(z_A) = f(1-i) = 3i(1-i) + 5 = 3i - 3i^2 + 5 = 3i + 3 + 5 = 8 + 3i$$

2. C a pour image lui-même par f si $f(z_C) = z_C$. On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow 3iz + 5 = z \\ &\Leftrightarrow 5 = z(1-3i) \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{1-3i} = z \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5(1+3i)}{1^2+3^2} = \frac{5(1+3i)}{10} = \frac{1+3i}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_C = \dfrac{1+3i}{2}$, et donc C a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

3. On calcule :

$$z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = 1 - i - \frac{1+3i}{2} = \frac{2-2i}{2} - \frac{1+3i}{2} = \frac{2-2i-1-3i}{2} = \frac{1-5i}{2}$$

et

$$z_{\overrightarrow{CA'}} = z_{A'} - z_C = 8 + 3i - \frac{1+3i}{2} = \cdots = \frac{15+3i}{2}$$

4. D'après les affixes des vecteurs on peut lires les coordonnées : $\overrightarrow{CA}\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{CA'}\left(\dfrac{15}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.
Calculons alors leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4} - \frac{15}{4} = 0$$

Puisque leur produit scalaire est nul, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CA'}$ sont normaux. (Autrement dit les droites (CA) et (CA') sont perpendiculaires.)

5. • Pour déterminer l'image par f de l'axe des réels purs, on considère tout d'abord un point quelconque M de l'axe des réels purs. Alors $M(x_M; 0)$ avec $x_M \in \mathbb{R}$, et donc $z_M = x_M$. Notons M' l'image de M par f. Alors M' a pour affixe :

$$f(z_M) = f(x_M) = 3ix_M + 5 = 5 + 3ix_M$$

Ainsi, $M'(5; 3x_M)$, autrement dit M' appartient à la droite d'équation $x = 5$.
Réciproquement [1], soit M' un point de la droite d'équation $x = 5$. Alors M' a pour coordonnées $(5; y)$ avec $y \in \mathbb{R}$, donc $z_{M'}$. Or, en considérant le point $M\left(\dfrac{y}{3}; 0\right)$, on peut voir que :

$$f(z_M) = f\left(\frac{y}{3}\right) = 3i \times \frac{y}{3} + 5 = iy + 5 = 5 + iy = z_{M'}$$

Ainsi, M' est l'image de M par f, M étant un point de l'axe des réels purs.
Conclusion : l'image par f de la droite des réels purs est la droite d'équation $x = 5$.

1. On doit s'assurer que tout point de la droite d'équation $x = 5$ est l'image d'un point de l'axe des réels par f.

- Pour obtenir l'image de l'axe des imaginaires purs, on opère de même manière.
  Un point M de l'axe des imaginaires purs a pour coordonnées $(0; y_M)$ avec $y_M \in \mathbb{R}$. Son image M' a alors pour affixe $f(iy_M) = \cdots = -3y + 5 \in \mathbb{R}$. Autrement dit, M' appartient à l'axe des réels purs (la droite d'équation $y = 0$).
  Réciproquement, soit M' un point de l'axe des réels purs. Alors $M'(x,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
  On considère le point $M\left(0; \dfrac{5-x}{3}\right)$. Alors l'image par f de M a pour affixe :

$$f(z_M) = f\left(\frac{5-x}{3}i\right) = 3i \times \frac{5-x}{3}i + 5 = -(5-x) + 5 = x = z_{M'}$$

  Ainsi, M' est l'image de M par f, M étant un point de l'axe des imaginaires purs.
  Conclusion : l'image par f de la droite des imaginaires purs est l'axe des réels purs.

6. Voici la figure demandée. L'image de l'axe des réels purs est tracée en bleu :