Devoir maison n°09 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x<3 &\Leftrightarrow -x>-3 \quad (-1<0)\\ &\Leftrightarrow 6-x>3\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6-x}<\frac{1}{3} \quad \text{(fonction inverse décroissante sur]}0;+\infty\text{[)}\\ &\Leftrightarrow \frac{9}{6-x}<\frac{9}{3} \quad (9>0)\\ &\Leftrightarrow f(x)<3 \end{aligned}$$

(b) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $U_n < 3$ ».
Démontrons que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence :
Initialisation :
$U_0 = -3 < 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Étape de récurrence :
Soit n un certain entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, autrement dit que $U_n < 3$. Démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $U_{n+1} < 3$.
Or $U_{n+1} = f(U_n)$, et on sait par hypothèse de récurrence que $U_n < 3$. D'après la question précédente, on en déduit alors que $f(U_n) < 3$. Donc $U_{n+1} < 3$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Par le principe de récurrence on a bien démontré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$, autrement dit que $U_n < 3$.
Autrement dit, U est majorée par 3.

(c) On exprime :

$$U_{n+1}-U_n = f(U_n)-U_n = \frac{9}{6-U_n}-U_n = \frac{9-(6-U_n)U_n}{6-U_n} = \frac{(U_n)^2-6U_n+9}{6-U_n} = \frac{(U_n-3)^2}{6-U_n}$$

Or on sait que $U_n < 3$, dont $-U_n > -3$ puis $6-U_n > 3 > 0$. L'expressions $(U_n-3)^2$ étant également positive, on en déduit que $U_{n+1}-U_n > 0$.
Autrement dit, U est croissante.

(d) Puisque U est croissante et majorée par 3 d'après les questions précédentes, on en déduit que U est convergente.

2. (a) On exprime (on note au passage que V est bien définie car $U_n < 3$) :

$$\begin{aligned} V_{n+1}-V_n = \frac{1}{U_{n+1}-3}-\frac{1}{U_n-3} &= \frac{1}{f(U_n)-3}-\frac{1}{U_n-3}\\ &= \frac{1}{\dfrac{9}{6-U_n}-3}-\frac{1}{U_n-3}\\ &= \frac{1}{\dfrac{9-18+3U_n}{6-U_n}}-\frac{1}{U_n-3}\\ &= \frac{6-U_n}{3U_n-9}-\frac{3}{3U_n-9} \end{aligned}$$

On poursuit :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)} \\ &= \frac{3 - U_n}{3(U_n - 3)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Puisque $V_{n+1} - V_n$ est constant, égal à $-\frac{1}{3}$, on en déduit que V est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

(b) Par conséquent, $V_n = V_0 - \frac{1}{3}n$.
Or $V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = \frac{1}{-3-3} = -\frac{1}{6}$.
Donc $V_n = -\frac{1}{6} - \frac{n}{3} = -\frac{1+2n}{6}$.
Par suite, on a (V_n ne pouvant être nulle) :

$$V_n = \frac{1}{U_n - 3} \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 3$$

Donc :

$$U_n = -\frac{6}{1+2n} + 3 = \frac{-6+3+6n}{1+2n} = \frac{6n-3}{2n+1} = 3\frac{2n-1}{2n+1}$$

(c) On a :

$$\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3 \times \frac{2-0}{2+0} = 3$.
On peut aussi voir que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$, donc en utilisant l'expression $U_n = \frac{1}{V_n} + 3$, on trouve la même limite.