Devoir maison n°10 – mathématiques
Donné le 14/01/2014 – à rendre le 21/01/2014

## Exercice 1

1. (a) On a $f_1(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$.

   (b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

   D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ (car $e^x > 0$), donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$.

   Par suite, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on obtient que $\lim\limits_{x\to-\infty} x \times \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

   (c) D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

   On en déduit que $\mathcal{C}_1$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

   (d) Pour étudier les variations de $f_1$ sur $\mathbb{R}$, on calcule la dérivée $f_1'$.

   $f_1$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

   Ainsi, $f_1' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, donc $f_1'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

   On a $e^x > 0$, donc le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1 - x$. Or $1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$.

   Par conséquent :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_1'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f_1$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

   (e) i. La fonction $g$ est de la forme $uv$ avec $u(x) = -(x+1)$ et $v(x) = e^{-x}$.

   On a $u'(x) = -1$. $v$ est de la forme $e^w$ avec $w(x) = -x$.

   Par suite, $w'(x) = -1$ et $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -e^{-x}$, puis $g' = (uv)' = u'v + uv'$.

   Donc $g'(x) = -e^{-x} - (x+1) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-1 + x + 1) = xe^{-x} = f_1(x)$.

   ii. On résout : $f_1(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (car $e^x > 0$).

   Par conséquent, $f_1(x)$ est positive si $x > 0$, négative sinon.

   iii. Puisque $f_1$ est la dérivée de $g$, on en déduit que $g$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

2. (a) Pour tout $k > 0$, on a $f_k(0) = k \times 0 \times e^{-k\times 0} = 0$.

   Donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent toutes par le point $O$, origine du repère.

   (b) $f_k$ est de la forme $uv$ avec $u(x) = kx$ et $v(x) = e^{-kx}$.

   On a $u'(x) = k$. La fonction $v$ est de la forme $e^w$ avec $w(x) = -kx$, donc $w'(x) = -k$.

   Par suite $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -ke^{-kx}$.

   Enfin, $f_k'(x) = (u'v + uv')(x) = ke^{-kx} - k^2xe^{-kx} = (k - k^2x)e^{-kx} = k(1 - kx)e^{-kx}$.

(c) $f_k$ admet un maximum si $f_k'(x)$ s'annule en changeant de signe (de $+$ à $-$).

On étudie donc le signe de $f_k'$. Or $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$, donc $f_k'$ est du signe de $(1 - kx)$.

On résout donc : $1 - kx > 0 \Leftrightarrow 1 > kx \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{k}$ (car $k > 0$)

Par conséquent :

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{1}{k}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $f_k$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | |

Calcul de $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right)$ : $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} e^{-k \times \frac{1}{k}} = 1e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Ainsi, quelque soit $k > 0$, $f_k$ admet bien un maximum, et celui-ci vaut $\dfrac{1}{e}$.

(d) On rappelle la formule de l'équation de la tangente : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

On calcule donc $f_k'(0) = k(1 - k \times 0)e^{-k \times 0} = k \times 1 \times 1 = k$ et $f_k(0) = k \times 0 \times e^{-k \times 0} = 0$.

Par suite, l'équation de la tangente est $y = kx$.