

Devoir maison n°11 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Un point de la courbe $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $(x; f(x))$.
Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0.
On résout donc

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2) = 0 \text{ car } e^{-x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Ainsi le point $A(-2; 0)$ est l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point $B(0; f(0))$.

On calcule donc : $f(0) = (0+2)e^{-0} = 2 \times 1 = 2$. Ainsi, B a pour coordonnées $(0; 2)$.

- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

D'autre part, $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$.

Ainsi donc, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ (autrement dit l'axe des abscisses) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

- (c) Pour étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, calculons la dérivée f' de f .

En notant $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$, on considère que f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = e^x$.

Par suite, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$, puis $f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{1e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - x - 2}{e^x} = \frac{-x - 1}{e^x}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(-x - 1)$.

Or $(-x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$, on obtient :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f			

Calcul : $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = 1e^1 = e$.

2. (a) On a $\mathcal{D} = \int_0^1 f(t)dt$.

(b) La valeur approchée s'obtient en appliquant l'algorithme.

En fait, la valeur de S affichée est le résultat de la somme suivante :

$$\begin{aligned} S &= 0 + \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{9}{4}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{11}{4}e^{-\frac{3}{4}}\right) \\ &\simeq 1,6419 \\ &\simeq 1,642 \end{aligned}$$

(c) L'algorithme est le suivant :

Variables :

k est un nombre entier

S est un nombre réel

N un entier naturel, $N > 1$

Entrée :

Saisir N

S prend la valeur 0

Traitement :

Pour k allant de 0 à $N - 1$ Faire

S prend la valeur $S + \frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$

FinPour

Sortie :

Afficher S

Exercice 2

1. Les solutions de $2X^2 - 5X - 6 = 0$ (calculer Δ ...) sont $X_1 = \frac{5 - \sqrt{73}}{4}$ et $X_2 = \frac{5 + \sqrt{75}}{4}$.

$$\text{Donc } \mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{5 - \sqrt{73}}{4}; \frac{5 + \sqrt{75}}{4} \right\}.$$

2. En posant $X = \ln(x)$, on a $2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X - 6 = 0$.

Étant donnée la question précédente, il suffit donc de résoudre $\ln(x) = X_1$ et $\ln(x) = X_2$.

Or $\ln(x) = X \Leftrightarrow x = e^X$.

$$\text{Donc } \mathcal{S}_2 = \left\{ e^{\frac{5 - \sqrt{73}}{4}}; e^{\frac{5 + \sqrt{75}}{4}} \right\}.$$

3. Résolution dans $\mathbb{C}$ de $2x^2 - 5x + 6 = 0$: $\Delta = -23 < 0$. Donc deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{5 + i\sqrt{23}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 - i\sqrt{23}}{4}. \text{ Ainsi, } \mathcal{S}_3 = \left\{ \frac{5 + i\sqrt{23}}{4}; \frac{5 - i\sqrt{23}}{4} \right\}.$$