

Devoir maison n°12 – mathématiques
Donné le 28/01/2014 – à rendre le 04/02/2014

Exercice 1

1. Démontrer, à l'aide de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ et d'un changement de variable, que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
2. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - x \ln x$.
 - (a) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
 - (b) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
 - (c) Dresser le tableau de variation de la fonction g .
3. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{e^n}{n^n}$.
 - (a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
 - i. Le sens de variation de la suite u ;
 - ii. La limite éventuelle de la suite u .
 - (b) Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \ln u_n$.
 - i. En utilisant la question 2, déterminer le sens de variation de la suite v .
 - ii. En déduire le sens de variation de la suite u .
 - (c) Montrer que la suite u est bornée.
 - (d) Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 (Facultatif) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - x - \ln(x)}$$