

Devoir maison n°12 – mathématiques
Donné le 28/01/2014 – à rendre le 04/02/2014

Exercice 1

1. Pour $x > 0$, on pose $x = \frac{1}{X}$. Alors $X = \frac{1}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

De plus, $x \ln x = \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \frac{1}{X} (-\ln X) = -\frac{\ln X}{X}$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

(a) D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x - x \ln x = 0 - 0 = 0$.

Ensuite, $g(x) = x - x \ln x = x(1 - \ln x)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$.

Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

(b) $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$, donc par produit et somme de ces fonctions, g est dérivable sur ce même intervalle.

Soit $f : x \ln x$. La fonction f est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$.

Alors $u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{x}$, puis $f'(x) = (uv)'(x) = (u'v + uv')(x) = 1 \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Par suite, $g'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$.

(c) On a $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Par conséquent :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	−
variations de g		1	−∞

2. (a) On peut conjecturer que :

i. la suite u est décroissante ;

ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(b) i. On a $v_n = \ln u_n = \ln \left(\frac{e^n}{n^n} \right) = \ln(e^n) - \ln(n^n) = n \ln(e) - n \ln n = n - n \ln n = g(n)$.

Or v_n est définie pour $n \geq 1$, et d'après la question 1a, g est décroissante sur $[1; +\infty[$, donc v est décroissante.

ii. Puisque $v = \ln u$, on a $u = e^v$.

Or v est décroissante d'après la question précédente, et on sait que v et e^v ont les mêmes variations grâce à la stricte croissance de l'exponentielle.

Donc u est décroissante.

(c) Puisque u est décroissante, on sait qu'elle est majorée par son premier terme.

Par suite, puisque $n \geq 1 > 0$, et qu'une exponentielle est toujours strictement positive,

$u_n = \frac{e^n}{n^n} > 0$. Autrement dit u est minorée par 0.

Finalement, on peut confirmer que la suite u est bornée.

(d) Puisque u est décroissante et minorée, on peut affirmer qu'elle converge.

Il reste à en déterminer la limite. Pour cela on détermine tout d'abord la limite de v .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = -\infty$. Par suite, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

Alors, comme $u = e^v$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.