Devoir maison n°14 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IL} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} \quad \text{(Chasles)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \quad \text{car } I \text{ et } J \text{ sont milieux de } [AE] \text{ et } [CG] \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} \quad \text{car } ABFE \text{ et } BCGF \text{ sont des parallélogrammes} \\
&= \overrightarrow{AC} \quad \text{car } \overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{BF}
\end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AC}$, $ACLI$ est bien un parallélogramme.

(b) Tout d'abord, on remarque dans les calculs de la question précédente que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{0}$, donc que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$. Par suite on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} \quad \text{(Chasles)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IL} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{car } J \text{ et } K \text{ sont milieux de } [AB] \text{ et } [BC] \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{IL} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IL} \quad \text{(Chasles)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{LI} - \overrightarrow{LI} \quad \text{car } ACLI \text{ est un parallélogramme} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{LI}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{LI}$ sont colinéaires, et donc (JK) et (LI) sont parallèles.

(c) De la question précédente, on peut affirmer que $JKLI$ est un trapèze (et donc que les quatre points I, J, K et L sont coplanaires), mais n'est pas un parallélogramme, car $\overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LI} \neq \overrightarrow{LI}$.

Par conséquent, (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles, mais comme elles sont coplanaires elles sont donc sécantes en un point M.

(d) Tout d'abord, $I \in (AE)$ et $J \in (AB)$, donc $(IJ) \subset (ABE)$. De même, $(KL) \subset (BCG)$.
Donc M, l'intersection de (IJ) et (KL), appartient à la fois à (ABE) et à (BCG).
Or les plans (ABE) et (BCG) sont sécants, donc M appartient à leur intersection.
Déterminons cette intersection. Ils ont déjà pour point commun B. D'autre part, F appartient également aux deux plans (car $(AE)//(BF)$ et $(CG)//(BF)$ par les propriétés du cube). Donc l'intersection des plans (ABE) et (BCG) est la droite (BF).
On en déduit que $M \in (BF)$.

2. On montre tout d'abord que $(AH)//(BG)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} \quad \text{(Chasles)} \\
&= \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} \quad \text{(propriétés des faces du cube)} \\
&= \overrightarrow{BG} \quad \text{(Chasles)}
\end{aligned}$$

De même on peut montrer que $(CH)//(BE)$.

Par suite, (AH) et (CH) sont deux droites sécantes (en H) déterminant le plan (ACH) qui sont respectivement parallèles à deux droites (BG) et (BE) qui sont sécantes (en B) et qui déterminent le plan (BEG).

Donc (ACH) et (BEG) sont parallèles.

3. N est le centre de la face $ADHE$, donc $N \in (AH)$, puis $N \in (ABH)$. Or $(AH)//(BG)$ (voir la question précédente), donc $G \in (ABH)$.

   Ainsi, $(GN) \subset (ABH)$.

   Or (GN) et (AB), qui sont donc coplanaires, ne sont pas parallèles (car sinon on aurait $N = H$), donc elles sont sécantes en un point.

   Ce point appartient à (AB), donc au plan (ABC).

   Autrement dit, le point S, intersection de (GN) avec (ABC), est le point d'intersection de (GN) et (AB).

4. Dans la première question on a vu que $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CG} = 0$, donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$: les droites (EA) et (GC) sont parallèles et forment un plan, le plan (ACG).

   Or R est le centre de la face $EFGH$, donc $R \in (EG)$, et donc $R \in (ACG)$.

   De même, $L \in (CG)$, donc $L \in (ACG)$.

   Or (RL) et (AC), qui sont donc coplanaires, ne sont pas parallèles (car sinon on aurait $L = G$), donc elles sont sécantes en un point.

   Ce point appartient à (AC), donc au plan (ABC).

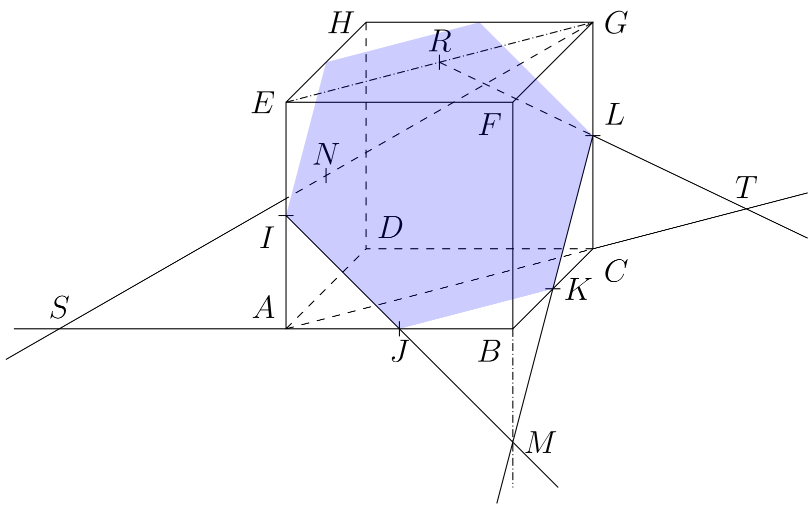
   Autrement dit, (RL) et (ABC) sont bien sécants et leur intersection T est le point d'intersection de (RL) et (AC).

5. La section du cube par le plan (IJK) est un hexagone régulier.

   En effet, on a vu que (IJ) et (KL) étaient sécantes, donc elles sont incluses dans (IJK). Ainsi, $[IJ]$, $[JK]$ et $[KL]$ sont trois des intersections avec les faces du cube.

   Or I, J, K et L sont les milieux d'arêtes du cube, et sont tels que (en allant rapidement) $IJ = JK = KL$.

   Finalement, les trois intersections manquantes doivent être parallèles aux trois premières (cela provient du fait que les faces opposées du cube sont parallèles). Elles seront elles aussi des segments reliant des milieux d'arêtes, et auront encore les mêmes longueurs.



Exercice 2

L'algorithme est le suivant :

```
Variables :
    A,B    saisies
    M,T    affichées
    X,Y    internes
Entrée :
    Afficher "Z est sous la forme A+iB"
    Saisir A
    Saisir B
Traitement :
    M prend la valeur √(A² + B²)
    Afficher "Module :"
    Afficher M
    Si M ≠ 0 Alors
      | X prend la valeur A ÷ M
      | Y prend la valeur B ÷ M
      | Si X ⩾ 0 Alors
      |   | T prend la valeur sin⁻¹(Y)
      | Sinon
      |   | Si Y ⩾ 0 Alors
      |   |   | T prend la valeur cos⁻¹(X)
      |   | Sinon
      |   |   | T prend la valeur − cos⁻¹(X)
      |   | FinSi
      | FinSi
      | Afficher "Argument :"
      | Afficher T
    Sinon
      | Afficher "Pas d'argument."
    FinSi
```

Ou plus simplement :

```
Variables :
    A,B    saisies
    M,T    affichées
    X    interne
Entrée :
    Afficher "Z est sous la forme A+iB"
    Saisir A
    Saisir B
Traitement :
    M prend la valeur √(A² + B²)
    Afficher "Module :"
    Afficher M
    Si M ≠ 0 Alors
      | X prend la valeur A ÷ M
      | Si B ⩾ 0 Alors
      |   | T prend la valeur cos⁻¹(X)
      | Sinon
      |   | T prend la valeur − cos⁻¹(X)
      | FinSi
      | Afficher "Argument :"
      | Afficher T
    Sinon
      | Afficher "Pas d'argument."
    FinSi
```