LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2013–2014

Devoir maison n°15 – mathématiques
Donné le 18/03/2014 – à rendre le 25/03/2014

Exercice 1

1. Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle I contenant deux nombres a et b tels que $a < b$. On pose, pour tout $x \in [a; b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
   Rappeler quelle est la dérivée de la fonction F sur $[a; b]$.
2. Soit $f(x) = x + 2$, définie pour $x \in [-2; +\infty[$.
   (a) Trouver une fonction F dont f est la dérivée sur $[-2; +\infty[$.
   (b) En existe-t-il d'autres ? Si oui, indiquer comment en trouver.
   (c) Trouver une fonction G telle que $G' = f$ et $G(2) = 0$.
   (d) Démontrer qu'il n'existe pas d'autre telle fonction.
   On pourra supposer qu'il en existe deux, G_1 et G_2, et utiliser la propriété suivante :
   Si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle I alors elle est constante sur I.
3. Soit Γ la fonction définie sur $[2; 10]$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_2^x (t + 2)dt$.
   (a) Calculer $\Gamma(2)$ et $\Gamma(10)$.
   On donnera en particulier une interprétation graphique de $\Gamma(10)$.
   (b) Déterminer les variations de Γ.
   (c) Quelle est l'expression de Γ sans notation intégrale ?

Exercice 2

On considère l'équation $(E) : x^3 = 1$.

1. Trouver a, b et c tels que $x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
3. En déduire les solutions de (E), et les écrire sous forme exponentielle.
4. Si l'on considère les images de ces trois nombres dans le plan complexe, quelle figure géométrique obtient-on ? Inutile de justifier.
5. En posant $x = e^{i\theta}$ dans l'équation (E), comment, par une résolution, peut-on retrouver les résultats de la question 3 ?
6. En s'inspirant de la question précédente, donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^5 = 1$.