

Devoir maison n°15 – mathématiques
Correction

Exercice 1

- La dérivée de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est f .
- Soit $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$. Alors F admet f pour dérivée sur $[-2; +\infty[$.
 - Il existe d'autres fonctions ayant f pour dérivée. Pour tout nombre réel k , $F + k$ en est une, puisque $(F + k)' = F' + 0 = f$.
 - Posons $G = F + k$, et cherchons k tel que $G(2) = 0$. Or $G(2) = F(2) + k = 2 + 4 + k = 6 + k$. Ainsi, si $k = -6$ alors $G(2) = 0$.
Par suite, $G : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ est telle que $G' = f$ et $G(2) = 0$.
 - Soit G_1 et G_2 deux fonctions ayant pour dérivée f et telles que $G_1(2) = G_2(2) = 0$.
Soit $D = G_1 - G_2$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $D' = G_1' - G_2' = f - f = 0$. La fonction D a donc une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ et est constante. Or $D(2) = G_1(2) - G_2(2) = 0 - 0 = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $D(x) = 0$, autrement dit $G_1(x) = G_2(x) : G_1 = G_2$.
Il existe donc une seule fonction G telle que $G' = f$ et $G(2) = 0$.
- $\Gamma(2) = 0$ car on intègre de 2 à 2, et l'aire d'un segment vaut 0.
 $\Gamma(10)$ est l'aire délimitée par la courbe de $f : x \mapsto x + 2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 10$.
En effet, la fonction f est strictement positive sur $[2; 10]$ ($x + 2 \geq 2 + 2 \geq 4 > 0$).
Il s'agit alors de calculer l'aire d'un trapèze rectangle : $\Gamma(10) = \frac{8 \times (4 + 12)}{2} = 64$.
 - D'après la première question, $\Gamma' = f$, et comme $f > 0$, on obtient que Γ est strictement croissante sur $[2; 10]$.
 - Γ est telle que $\Gamma' = f$ et $\Gamma(2) = 0$, f étant la même fonction que définie précédemment.
Nous avons alors démontré que $\Gamma(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

Exercice 2

On considère l'équation $(E) : x^3 = 1$.

- On a (en trichant) : $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
En effet, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$. Donc $a = b = c = 1$.
Sans tricher, on développe $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$ et on résout le système obtenu en identifiant la forme réduite à $x^3 - 1$.
- l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour solutions (on calcule Δ , ...) : $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.
- Comme $x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 + x + 1 = 0)$, alors les solutions de (E) sont 1, z_1 et z_2 .

$$\text{On a } |z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{(-)\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

(En fait quand le module vaut 1 ce calcul n'est pas très nécessaire, il suffit d'observer que l'on a directement une forme trigonométrique)

$$\text{L'argument } \theta \text{ de } z_1 \text{ est tel que } \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc } \theta = -\frac{2\pi}{3}.$$

On sait que $z_2 = \overline{z_1}$, et $\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1)$, donc $\arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$.

Par conséquent,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i0}; e^{-\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{2i\pi}{3}} \right\}$$

4. On obtient un triangle équilatéral (dont O est le centre de gravité).

5. En posant $x = e^{i\theta}$ dans l'équation (E) , on obtient : $(E) \Leftrightarrow (e^{i\theta})^3 = e^{i0} \Leftrightarrow e^{i3\theta} = e^{i0}$.

Or deux nombres complexes écrits sous forme exponentiel sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument. Donc ici, puisque les modules sont tous deux égaux à 1, cela équivaut à $3\theta = 0$ à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). Autrement dit, $3\theta = 0 + 2k\pi$, soit $\theta = \frac{2k\pi}{3}$. Or, il y a trois solutions donnant des valeurs d'argument différentes : pour $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$, qui donnent respectivement $-\frac{2i\pi}{3}$, 0 et $\frac{2i\pi}{3}$. On retrouve bien : $\mathcal{S} = \left\{ e^{i0}; e^{-\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{2i\pi}{3}} \right\}$.

On pourrait choisir, plus simplement, de prendre pour valeurs de k 0, 1 et 2. On a alors : $\mathcal{S} = \left\{ e^{i0}; e^{\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$, ce qui est le même ensemble.

6. En posant de même $x = e^{i\theta}$, on obtient $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela nous donne cinq valeurs différentes d'arguments, pour k allant de 0 à 4. On a alors : $\mathcal{S} = \left\{ e^{i0}; e^{\frac{2i\pi}{5}}; e^{\frac{4i\pi}{5}}; e^{\frac{6i\pi}{5}}; e^{\frac{8i\pi}{5}} \right\}$.