Devoir surveillé n°01 – mathématiques
02/10/2013

Exercice 1 (5 points) On pose, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

On pose aussi, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 2 (15 points) On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   (a) En déduire a limite de la suite u.
   (b) Démontrer que la suite u est croissante.
3. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que v est géométrique.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
4. Soit p un entier non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   (b) On considère le plus petit entier n_0. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   (c) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.