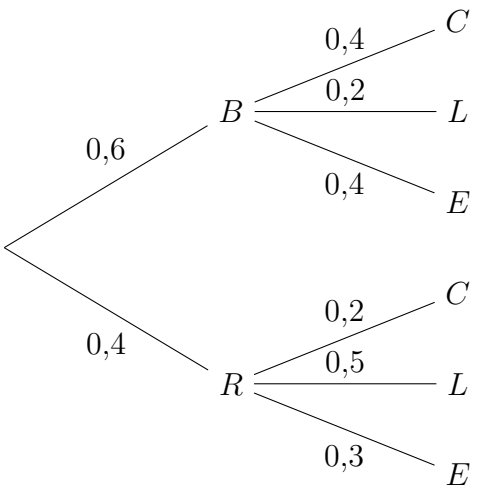
Devoir surveillé n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1 (10 points)

1. (a) Étant donné que l'on tire au hasard un cube parmi 100, la loi est équirépartie et on obtient l'arbre suivant :



(b) $\mathbb{P}_R(E)$ est la probabilité que soit tiré un cube marqué d'une étoile sachant qu'il est rouge. Cette probabilité vaut 0,3 (visible sur l'arbre).

(c) On nous demande de calculer $\mathbb{P}(L)$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L) &= \mathbb{P}(B \cap L) + \mathbb{P}(R \cap L)\\ &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(L) + \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(L)\\ &= 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}5\\ &= 0{,}12 + 0{,}20\\ &= 0{,}32\end{aligned}$$

La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est donc 0,32.

(d) On nous demande de calculer $\mathbb{P}_L(B)$. On utilise la définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_L(B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap L)}{\mathbb{P}(L)}\\ &= \frac{0{,}12}{0{,}32}\\ &= 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}5\\ &= 0{,}375\end{aligned}$$

La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc 0,375.

2. (a) Cette fois-ci, $\mathbb{P}_R(L) = \dfrac{x}{100}$. Par suite,

$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(B \cap L) + \mathbb{P}(R \cap L) = 0{,}12 + \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(L) = 0{,}12 + 0{,}4 \times \dfrac{x}{100} = 0{,}12 + 0{,}004x.$

(b) On veut B et L indépendants. C'est le cas si, par définition, $\mathbb{P}_B(L) = \mathbb{P}(L)$, autrement dit si $0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}004x$. On résout cette équation, et on trouve $x = 20$. Il faut donc que 20% des boules rouges soient marquées d'un losange.

On peut aussi considérer l'équation provenant de la propriété qui caractérise l'indépendance (mais ici c'est plus long et compliqué) :

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbb{P}(B \cap L) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(L) & \Leftrightarrow & 0{,}12 & = & 0{,}6 \times (0{,}12 + 0{,}004x) \\ & \Leftrightarrow & 0{,}12 & = & 0{,}072 + 0{,}0024x \\ & \Leftrightarrow & 0{,}048 & = & 0{,}0024x \\ & \Leftrightarrow & x & = & 20 \end{array}$$

Exercice 2

1. On a $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
2. Il faut tout d'abord déterminer le signe de $f'(x)$, qui est une fonction polynomiale de degré 2. On détermine alors ses racines en calculant le discriminant :
   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
   Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2\times 3} = \dfrac{-1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{6} = 1$
   Comme $a = 3 > 0$, on a le signe de f' puis les variations de f comme suit :

x	-1		$\frac{-1}{3}$		1		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	-2	↗	$\frac{-22}{27}$	↘	-2	↗	1

3. f étant une fonction polynomiale, elle est continue sur $[1;2]$. De plus, d'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur [1,2]. Enfin, $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$. Donc $f(1) \leqslant 0 \leqslant f(2)$.
   Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1;2]$.
4. Le tableau de variations nous permet d'affirmer que pour tout x de l'intervalle $[-1;1]$, $f(x)$ est strictement inférieure à 0, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[-1;1]$. Comme α est l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $[1;2]$, on en déduit donc que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur I.
5. La calculatrice nous permet de donner $\alpha \simeq 1{,}839$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 Sur $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ respectivement, l'expression de g est obtenue par opérations sur des fonctions usuelles continues, donc g est continue sur ces intervalles. Il suffit alors de vérifier la continuité de g en 2. Soit donc, pour $x = 2$:

- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\times 2}{2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$.
- $x^3 - 2x - 0{,}5 = 2^3 - 2 \times 2 - 0{,}5 = 8 - 4 - 0{,}5 = 3{,}5$.

Comme on obtient les mêmes valeurs, on en déduit que g est continue en 2, puis sur $\mathbb{R}$.