

DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 20 novembre 2013

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Obligatoire

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte
pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.**

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice on demande au candidat de donner des démonstrations exigibles de propriétés du cours, en utilisant les prérequis indiqués.

- **Prérequis** : définition de limite infinie pour une suite.
 - **Propriété** : Soient u et v deux suites telles que $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- **Prérequis** : Toute définition de l'indépendance de deux événements.
 - **Propriété** : Soit A et B deux événements indépendants. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- **Prérequis** : Les deux propriétés suivantes :
 - ★ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Si, pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
 - ★ Il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
 - **Propriété** : Il existe une **unique** fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Exercice 2 (5 points)

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n -ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

- Donner a_1 et b_1 .

Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,

$$\text{puis : } a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}.$$

- Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

On précisera la raison et le premier terme U_1 .

(b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .

(c) En admettant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, déterminer la limite de la suite (a_n) .

(d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,666\ 5$.

Exercice 3 (6 points)

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathcal{T}$ commune à ces deux courbes.

- Sur le graphique représenté dans l'annexe, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) .
- On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .
 - Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_A)$ à la courbe (C_1) au point A.
 - Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_B)$ à la courbe (C_2) au point B.
 - En déduire que les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a &= -2b \\ e^a - ae^a &= b^2 - 1 \end{cases}.$$

- Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$\begin{cases} e^a &= -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 &= 0 \end{cases}.$$

- Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation

$$(E) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$

- Montrer que pour tout x appartenant à $] -\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x - 1) < 0$.
 - En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $] -\infty ; 0[$.
 - Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; 5]$, puis dans $[0 ; +\infty[$.
On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a .
- On prend pour A le point d'abscisse a . Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues.

Exercice 4 (4 points) Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes.

- Soit z un nombre complexe. On pose $Z = z^2 - \bar{z}^2$.
 Z est-il réel, imaginaire pur ou quelconque ? Justifier.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante d'inconnue z : $(2i + 3)\bar{z} - 3i = 5\bar{z} + 4 - 5i$.
On donnera la solution sous forme algébrique.
- Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on définit $Z = (4 + 3i)z + (-1 + 3i)$.
Caractériser géométriquement l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que Z est imaginaire pur.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Exercice 3, question 1

