Devoir surveillé n°04 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».
   On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Initialisation : $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier n strictement positif, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit que $u_n > 0$.
   On doit démontrer alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $u_{n+1} > 0$.
   Or, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$. Comme $n > 0$, on a $n+1 > 0$ puis $\dfrac{n+1}{2n} > 0$.
   De plus, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.
   Un produit de facteurs positifs est positif, donc $u_{n+1} > 0$: $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout entier naturel $n > 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit que $u_n > 0$.

   (b) On exprime :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n}u_n - u_n &= \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right)u_n \\
&= \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n}\right)u_n \\
&= \frac{1-n}{2n}u_n
\end{aligned}$$

   Or, on a démontré que $u_n > 0$ et $n > 0$, donc $2n > 0$, $1 - n \leqslant 0$ puis $\dfrac{1-n}{2n}u_n \leqslant 0$.
   La suite u est bien décroissante.

   (c) Puisque u est décroissante et minorée (car positive), on en déduit que u converge.

2. (a) On exprime :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1}}{n+1}}{\frac{u_n}{n}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{u_n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{2n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$$

   On obtient une constante $q = \dfrac{1}{2}$, donc v est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   De plus, $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = u_1 = \dfrac{1}{2}$

   (b) Le terme général de la suite v est $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Par suite, $u_n = n \times v_n = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = n \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n}{2^n}$.

3. Puisque, $n \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n$, on en déduit que : $\frac{n}{2^n} \leqslant \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

   Donc :

$$0 < u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

   Or, $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. (a) L'expression à écrire est $(I+1)/(2I) \times U$.
   (b) L'algorithme demande un nombre $A > 0$.
   Puis il calcule les termes de la suite u tant qu'ils sont strictement supérieurs à A.
   L'algorithme affiche alors le plus petit rang i tel que $u_i \leqslant A$.
   (Qui existe bien car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$)

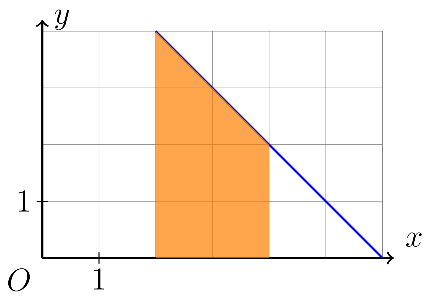
Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant x \leqslant 6 &\Leftrightarrow -6 \leqslant -x \leqslant -2 \quad (-1 < 0) \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant -x + 6 \leqslant 4 \end{aligned}$$

   Donc quelque soit $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$.
   Autre manière de justifier : f est affine avec un coefficient directeur négatif ($a = -1 < 0$), donc f est décroissante. De plus, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$, donc quelque soit $x \in [2;6]$, $f(x) \geqslant 0$.

2. La figure est la suivante :



3. $\int_2^4 f(t)dt$ est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$. Elle est représentée en orange sur le graphique.

4. Il s'agit de l'aire d'un trapèze rectangle :

$$J = \frac{(l_1 + l_2)h}{2} = \frac{(f(2) + f(4)) \times (4-2)}{2} = \frac{(4+2) \times 2}{2} = 6$$