

Devoir surveillé n°06 – mathématiques  
12/02/2014**Exercice 1 (10 points - Logarithme)**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 5 \ln(x + 3) - x$$

1. (a) On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .  
Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0 ; +\infty[$ .
- (b) Donner, dans un tableau, les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
- (c) Montrer que, pour tout  $x$  strictement positif on a

$$f(x) = x \left( 5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right).$$

- (d) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- (e) Compléter le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
2. (a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
On notera  $\alpha$  cette solution.
- (b) Après avoir vérifié que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[14 ; 15]$ , donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- (c) En déduire le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

**Exercice 2 (5 points - Loi exponentielle)**

Un commerçant vend des moteurs électriques dont la durée de vie, en années, est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,15.

1. Si le moteur est garanti un an, quelle proportion de ses clients le commerçant devra-t-il dépanner avant la fin de la garantie ? Arrondir le résultat à 1% près.
2. Quelle durée de garantie maximale (en mois) doit être choisie pour que le commerçant ait à dépanner moins de 10% de ses clients durant cette garantie ?

**Exercice 3 (5 points - Complexes)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On considère le point  $I$  d'affixe  $i$  et le point  $A$  d'affixe  $z_A = \sqrt{3} + 2i$ .  
Montrer que le point  $A$  appartient au cercle  $\Gamma$  de centre le point  $I$  et de rayon 2.
2. Soit  $B$  le point d'affixe  $z_B = -1 + i(\sqrt{3} + 1)$ .  
Justifier que le point  $B$  appartient au cercle  $\Gamma$ .
3. Calculer l'affixe du point  $C$  symétrique du point  $A$  par rapport au point  $I$ .
4. Quelle est la nature (précise) du triangle  $ABC$  ? Justifier.