LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2013–2014

Devoir surveillé n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 2

On note T la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,15.

1. On calcule $\mathbb{P}(T \leqslant 1) = 1 - e^{-0{,}15\times 1} \simeq 0{,}139$.
   Ainsi, on peut estimer qu'il y aura 14% des clients qui devront être dépannés pendant la garantie.
2. On cherche x tel que $\mathbb{P}(T \leqslant x) \leqslant 0{,}10$. On résout donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant x) \leqslant 0{,}1 &\Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}15x} \leqslant 0{,}1 \\
&\Leftrightarrow e^{-0{,}15x} \geqslant 0{,}9 \\
&\Leftrightarrow -0{,}15x \geqslant \ln(0{,}9) \quad (\ln \text{ est croissante sur}]0;+\infty[) \\
&\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{\ln(0{,}9)}{0{,}15} \quad (\div(-0{,}15) < 0)
\end{aligned}$$

   Or $-\dfrac{\ln(0{,}9)}{0{,}15} \simeq 0{,}70$. La valeur obtenue étant en années, on obtient en mois : $0{,}70 \times 12 \simeq 8{,}4$.
   Pour avoir à dépanner moins de 10% des clients lors de la garantie, le commerçant doit choisir une durée de garantie d'au plus 8 mois.

Exercice 3

1. On calcule : $IA = |z_A - z_I| = |\sqrt{3} + 2i - i| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
   Donc A appartient bien au cercle Γ.
2. On calcule de même :
   $IB = |z_B - z_I| = |-1 + i(\sqrt{3}+1) - i| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.
   Donc B appartient bien lui aussi au cercle Γ.
3. Puisque C est le symétrique du point A par rapport au point I, on a $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$, donc $z_{\overrightarrow{CI}} = z_{\overrightarrow{IA}}$, autrement dit $z_I - z_C = z_A - z_I$. Ainsi, $z_C = 2z_I - z_A = 2i - \left(\sqrt{3} + 2i\right) = -\sqrt{3}$.
4. Puisque C est symétrique de A par rapport au point I, et puisque A appartient à Γ, cercle de centre I et de rayon 2, alors $[CA]$ est un diamètre du cercle Γ. Comme, de plus, $B \in \Gamma$, on en déduit que ABC est rectangle en B.
   Cherchons à savoir si ABC est isocèle en B ou non. Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{BA}{BC} = \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| &= \left|\frac{\sqrt{3} + 2i - \left(-1 + i(\sqrt{3}+1)\right)}{-\sqrt{3} - \left(-1 + i(\sqrt{3}+1)\right)}\right| = \left|\frac{\sqrt{3} + 1 + i(1 - \sqrt{3})}{-\sqrt{3} + 1 + i(-\sqrt{3} - 1)}\right| \\
&= \frac{|\sqrt{3} + 1 + i(1 - \sqrt{3})|}{|1 - \sqrt{3} + i(-\sqrt{3} - 1)|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}-1)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (1-\sqrt{3})^2}} = 1
\end{aligned}$$

   Par suite, $AB = BC$, dont ABC est isocèle en B ; ABC est donc isocèle rectangle en B.

Note : En fait, en continuant le calcul de $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$, on peut trouver i, dont le module vaut bien 1, et dont l'argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Or $\arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

On retrouve bien le fait que ABC est rectangle isocèle en B.