DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 26 février 2014

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4 (7)

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 (5 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 (6 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad ; \quad z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = -1 - 3\mathrm{i}$$

On note D le point tel que $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $OD = OC$. On admet que $z_D = z_C e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

1. (a) Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
   (b) Sur le repère donné en annexe, placer les points A, B et C en prenant pour unité graphique 2 cm.
   (c) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. (a) Construire les points D et E. Déterminer les formes algébriques des affixes z_D et z_E.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et que $OE = AD$.
3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.
   Soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives non nulles z_A, z_B, z_C, z_D et z_E tels que
   le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   Le quadrilatère $OBEC$ est un parallélogramme.
   (a) Justifier les égalités suivantes : $z_B = iz_A$; $z_D = iz_C$; $z_E = iz_A + z_C$.
   (b) Montrer que $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$.
   (c) Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right)$ puis conclure.

Exercice 3 (4 points)

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

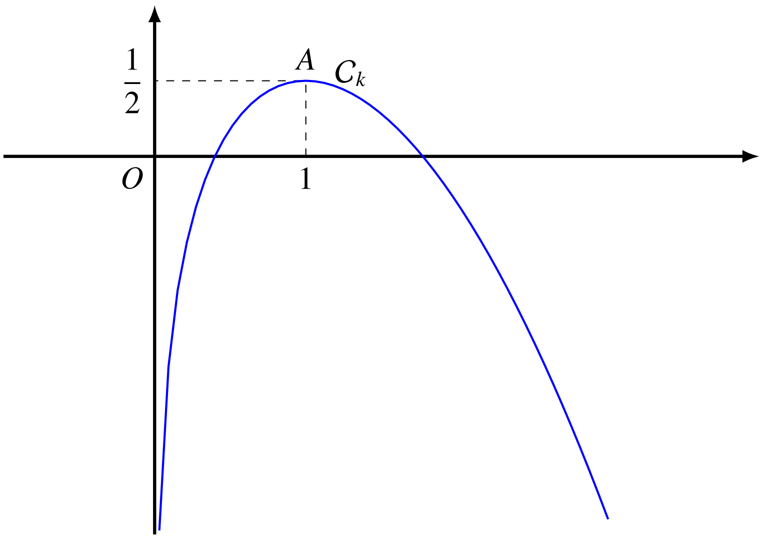
$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k.

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
   En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.
3. La courbe C_k a-t-elle des asymptotes ? Si oui, indiquer lesquelles.
4. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1 - 2kx^2}{x}$.
5. Pour un nombre réel $k > 0$ on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
variations de f_k	‖	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

   Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.
6. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.
   Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Exercice 4 (5 points)
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$.
   (a) Calculer la dérivée g' de g sur $[0; +\infty[$.
   (b) Déterminer alors les variations de g sur $[0; +\infty[$.
   (c) Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Exercice 2