Devoir surveillé n°07 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) $u_1 = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$; $u_2 = \dfrac{14}{13} \simeq 1{,}08$; $u_3 = \dfrac{40}{41} \simeq 0{,}98$; $u_4 = \dfrac{122}{121} \simeq 1{,}01$.

   (b) On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :
   - si n pair l'expression est positive ;
   - si n impair l'expression est négative.

   Autrement dit le signe est le même que $(-1)^n$.

   (c) $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1}$.

   (d) On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence). Soit $\mathcal{P}(n)$: « $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$ ».

   Initialisation : Faite au (b) ; en particulier, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $(u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$ alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et $(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.

   Conclusion : Par le principe de récurrence, on a démontré que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe .

   (a) On a :
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2 + (2u_n + 1)}{2u_n + 1}} = \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

   (b) On poursuit les calculs de la question précédente :
   $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{-1}{3} \times v_n$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.

   $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n$; $v_n = -\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (c) $(u_n + 1)\, v_n = u_n - 1$ donc $u_n\,(v_n - 1) = -1 - v_n$.

   On trouve bien que $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ comme dit dans l'énoncé. Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1 - (\frac{-1}{3})^{n+1}}{1 + (\frac{-1}{3})^{n+1}}$.

   Comme la suite $\left(\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{-1}{3}$, et comme $-1 < q < 1$, cette suite tend vers 0, et par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ qui est continue et vaut 1 pour $x = 0$, on peut dire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 1$.

Exercice 2

1. (a) On a $|z_A|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2$.
En factorisant : $z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
De même $|z_B|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_B| = 2$.
En factorisant : $z_B = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   (b) A appartient au cercle centré en O de rayon 2 et à la droite d'équation $y = 1$;
B appartient au cercle centré en O de rayon 2 et à la droite d'équation $x = -1$;
C se place grâce à son abscisse et son ordonnée. Voir la figure à la fin du document.

   (c) On a vu que $|z_A| = 2 = OA = |z_B| = 2 = OB$: le triangle OAB est isocèle en O.
D'autre part on a trouvé les arguments de z_A et z_B. Donc :
$\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \arg z_B - \arg z_A = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.
Le triangle AOB est rectangle isocèle en O.

2. (a) On sait que $z_D = z_C e^{i\frac{\pi}{2}} = iz_C = i(-1-3i) = 3-i$.
D'autre part $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z_E - z_B = z_C \Leftrightarrow z_E = z_B + z_C = -2 + i\left(\sqrt{3}-3\right)$.

   (b) $\overrightarrow{OE}\left(-2\ ;\ \sqrt{3}-3\right)$ et $\overrightarrow{AD}\left(3-\sqrt{3}\ ;\ -2\right)$. On calcule leur produit scalaire :
$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD} = -2\left(3-\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{3}-3\right) = -2\left(3-\sqrt{3}\right) + 2\left(3-\sqrt{3}\right) = 0$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
De plus $\left\|\overrightarrow{OE}\right\|^2 = (-2)^2 + \left(3-\sqrt{3}\right)^2$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \left(3-\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2$: ces expressions sont égales, donc $\left\|\overrightarrow{OE}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{OE}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \Leftrightarrow OE = AD$.

3. (a) OAB est rectangle isocèle en O, donc $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_B}{z_A} = i$ (module 1, rapport des longueurs OB et OA et argument $\dfrac{\pi}{2}$, mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$), soit $z_B = iz_A$.
De même, OCD est rectangle isocèle en O, donc $\dfrac{z_D - z_O}{z_C - z_O} = \dfrac{z_D}{z_C} = i$, soit $z_D = iz_C$.
Par suite, $OBEC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OB}$, autrement dit
$z_E - z_C = z_B - z_O$. Or $z_B = iz_A$, donc on a bien $z_E = z_B + z_C = iz_A + z_C$.

   (b) En utilisant les deux derniers résultats précédents :
$\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = \dfrac{iz_C - z_A}{iz_A + z_C} = \dfrac{i\left(z_C + iz_A\right)}{iz_A + z_C} = i$.

   (c) En utilisant module et argument des deux nombres complexes précédents, on obtient :
$\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i \Rightarrow \left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right| = |i| \Leftrightarrow \dfrac{AD}{OE} = 1 \Leftrightarrow AD = OE$;
$\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i \Rightarrow \left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AD}\right) = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $(OE) \perp (AD)$.
Sans utiliser d'affixes connues, on arrive aux mêmes résultats.

Exercice 3

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$.
2. On a $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit par produit des limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Puisque $x \neq 0$, on peut écrire $f_k(x) = x^2\left(\dfrac{f_k(x)}{x^2} - k + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et on vient de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_k(x)}{x^2} - k + \dfrac{1}{x^2} = -k < 0$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ on a finalement par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

3. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
4. f_k, somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, est dérivable sur cet intervalle et
$f_k'(x) = \dfrac{1}{x} - 2kx = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.
5. On étudie le signe de la dérivée : Comme $x > 0$, la dérivée est du signe du numérateur et $1 - 2kx^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 2kx^2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2k} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$.

   Donc sur $]0\ ;\ +\infty[$, la dérivée ne s'annule qu'en $\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$.

   D'après la règle su signe du trinôme $1-2kx^2$, la dérivée est du signe de $-2k$ donc négative sur $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right[$ et positive sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\ ;\ +\infty\right[$, ce qui justifie les flèches du tableau de variations
   D'autre part f_k a un maximum :
   $f_k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} - \ln\left(\sqrt{2k}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(2k) = \dfrac{1-\ln(2k)}{2}$.
6. On peut considérer le maximum : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-\ln(2k)}{2} \Leftrightarrow \ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

Partie A : étude de la fonction

1. Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Par opérations usuelles sur les dérivées : $f'(x) = 1e^{x-1} + x \times 1 \times e^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$.
4. Pour tout réel x, $e^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1.$$

2. Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0\ ;\ 0) \in T_a &\Leftrightarrow 0 = (a+1)e^{a-1}(0-a) + ae^{a-1} + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = e^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - a^2e^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

3. (a) En utilisant les opérations de dérivation, on a :

$$g'(x) = -2xe^{x-1} - x^2e^{x-1} = -x(2+x)e^{x-1}.$$

(b) Pour tout $x > 0$, $x + 2 > 0$ et par ailleurs $e^{x-1} > 0$; on en déduit que $g'(x) < 0$ et donc que g est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(c) Tout d'abord, 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - 1 = 0$.
Ensuite, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$,
et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Or 1 est solution de cette équation.
Conclusion : sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, c'est-à-dire $y = 2x$

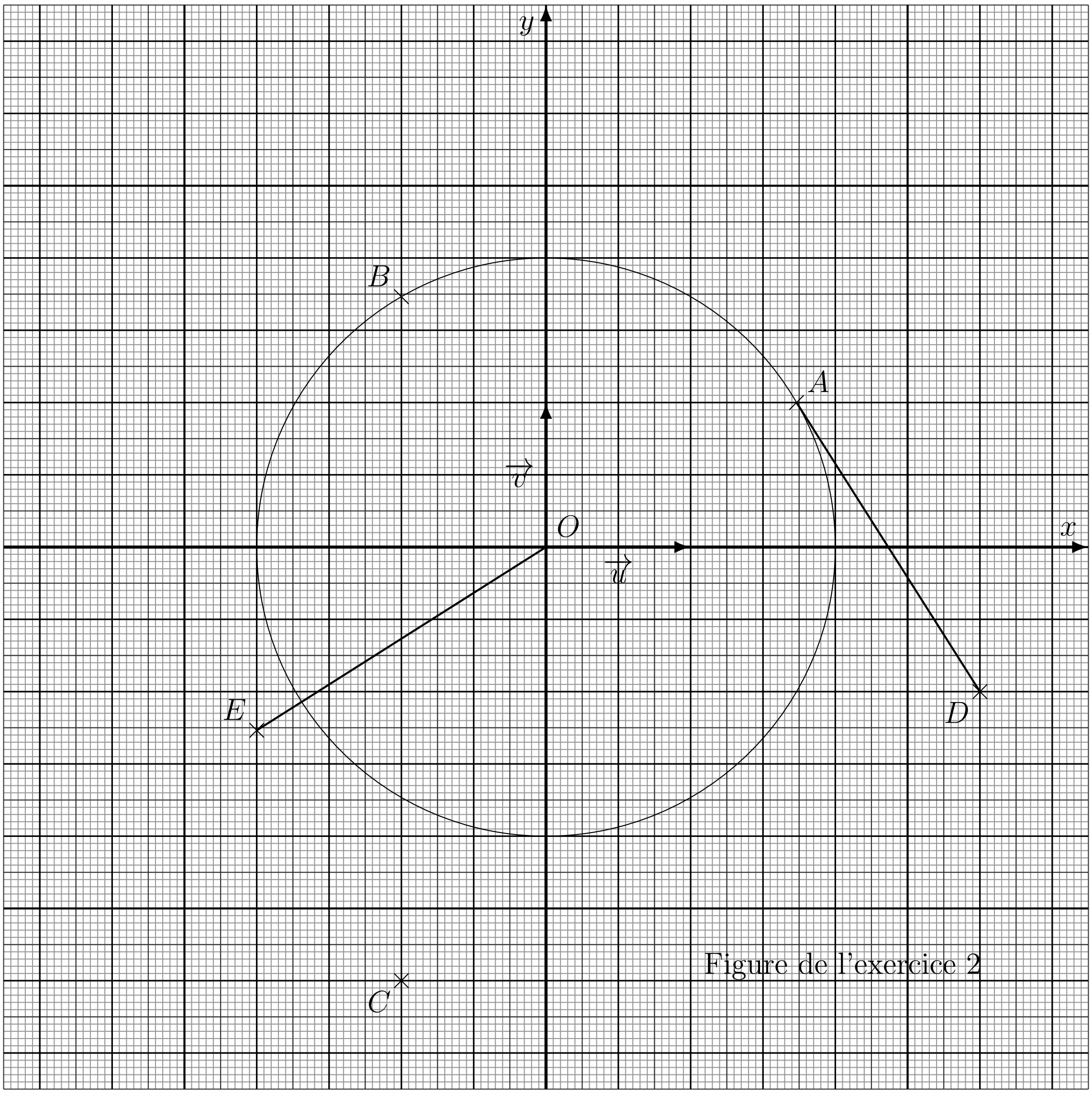

Figure de l'exercice 2