DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 09 avril 2014

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)

L'exercice comporte cinq propositions indépendantes. Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. Soit A et B deux événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
   Si A et B sont indépendants et si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0{,}4$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}8$.
2. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ vérifiant $|z - 2| = |z - 2\mathrm{i}|$ est la droite d'équation $y = x$.
3. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.
4. Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace. La droite passant par le point $B(4; 3; 7)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(1; 2; 3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & -1+2t \\ z & = & 1+3t \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$
5. Les droites dont on donne les représentations paramétriques ci-dessous sont non coplanaires :
$$(d)\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 2-3t \end{array}\right. \ (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (d')\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & -2-t \\ z & = & 4+2t \end{array}\right. \ (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 2 (6 points)

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par :
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :
    i et n,    entiers naturels
    u     ,    réel
Traitement :
    Saisir n
    u prend la valeur 0
    Pour i allant de 1 à n Faire
        | u prend la valeur u + 1/i
    FinPour
Sortie :
    Afficher u
```

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

On considère à nouveau la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1} - u_n = f(n)$, où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Soit k un entier strictement positif.
   Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$. En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k}$.
   Démontrer alors l'inégalité : $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

   (b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

   $$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

   (c) En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.
3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

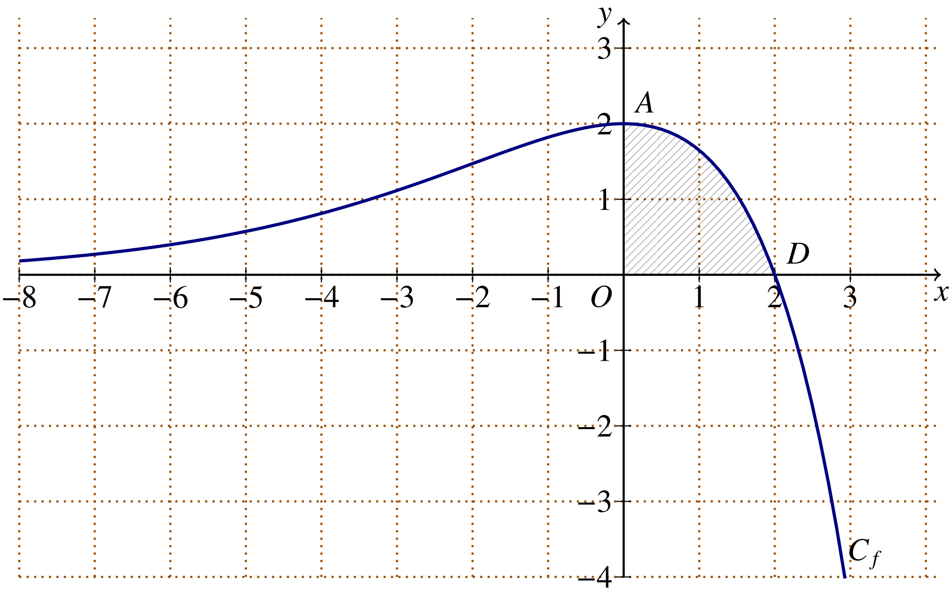
Exercice 3 (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Soit A et B les points d'affixes respectives : $a = 3 - i$ et $b = 1 - 3i$.

1. Démontrer que A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m.
   Soit N le point d'affixe n tel que $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MN}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $MA = MN$.
   Déterminer une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q l'affixe de Q.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   (a) Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.
   (b) Calculer $|q - 2 - i|$. Que parcourt Q lorsque M parcourt le cercle Γ ?

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0; 2)$ et $D(2; 0)$ appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 & = & 0 \\ ab - 1 & = & 0 \end{cases}$$

4. Déterminer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x + 2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. (a) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ sous la forme $F(x) = (cx + d)e^{0,5x}$.

   (b) Calculer alors la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(0) = 0$.
   Déterminer l'expression de G.