Le principe de récurrence

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Cette suite est définie par récurrence (chaque terme dépend du précédent). On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux. Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour se faire une idée. Ici, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 2u_0 + 1 = 1 \\ u_2 & = & 2u_1 + 1 = 3 \\ u_3 & = & 2u_2 + 1 = 7 \\ u_4 & = & 2u_3 + 1 = 15 \\ u_5 & = & 2u_4 + 1 = 31 \end{array}$$

Nous remarquons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble obéir à une loi toute simple : en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2. Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$$

Une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations. Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ? Notons $\mathcal{P}$ la propriété, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

Supposons un instant que pour un certain entier n fixé,
on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$. Alors on aurait :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.
Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang n alors elle l'est également au rang suivant. On dit que **la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire**.

Bilan : On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ était vraie aux rangs $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 (On dit que **la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée**).
Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc...
si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang (et il suffit d'initialiser pour un rang).
Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence** :

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (au moins à partir d'un certain rang n_0). Si :
– La propriété est **initialisée** à un certain rang n_0 (C'est-à-dire : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie)
– La propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0 (C'est-à-dire : pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)
Alors la propriété est vraie à tout rang plus grand que n_0.

Une image permettant d'illustrer ce principe est celui des dominos : Pour que tous les dominos tombent, il suffit que le premier tombe (initialisation), et que la chute d'un domino entraîne celle du domino suivant (hérédité).