Chapitre :
Trigonométrie

∽

I. Définitions

Définition

- La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.
- La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.

Propriété

- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

- En conséquence,
  - ⋆ si $f(x) = \sin(ax+b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = a\cos(ax+b)$
  - ⋆ si $f(x) = \cos(ax+b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = -a\sin(ax+b)$

Démonstration : Les trois premiers points sont admis.
Le troisième est une application de la formule de dérivation de $x \mapsto g(ax+b)$. □

Propriété **(Périodicité)**
Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

Propriété **(Parité)**

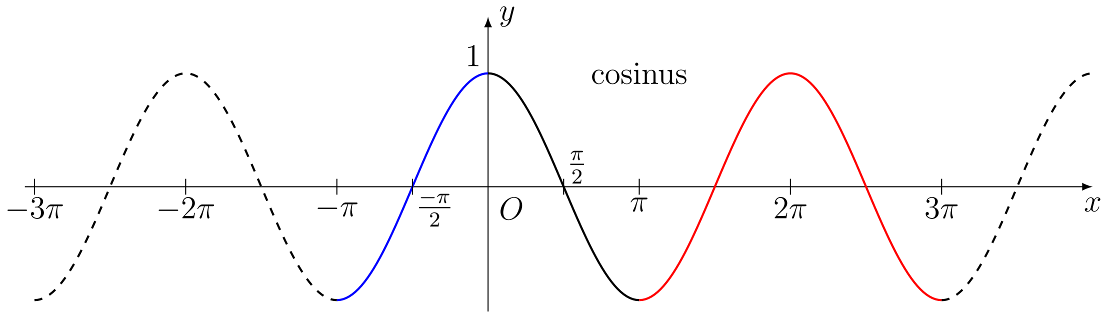
- La fonction sinus est **impaire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- La fonction cosinus est **paire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$;

II. variations

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0;\pi]$:

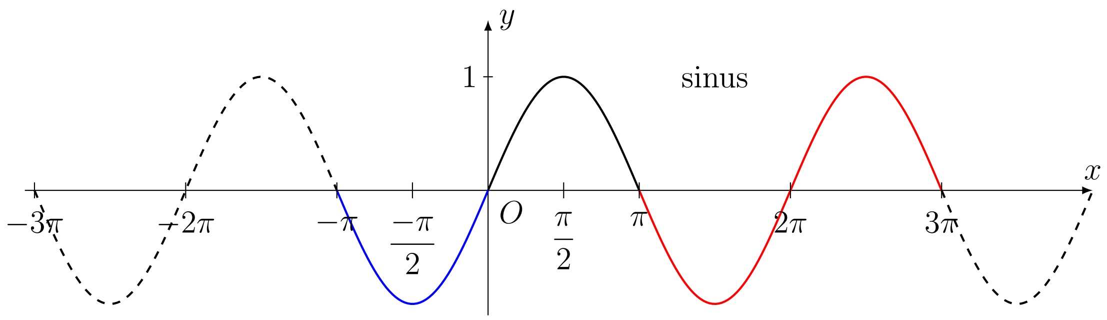
x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
variations de cos	1	↘	-1

Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi; 0]$; finalement on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.



La partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \overrightarrow{i}$).

Pour la fonction sinus, la courbe est la suivante (obtenue par le même moyen, voir page 80) :



la partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \overrightarrow{i}$).

▶ **Exercices :** 17,24-27p84 (dérivation)

▶ **Exercices :** 68,69,70,72p87 (dérivation)

▶ **Exercices :** 29p84, 78p87 (parité)

III. Une limite particulière

⊛ **Activité :** 3p77 (hors salle info, utiliser les calculatrices pour obtenir des tableaux de valeurs)

Propriété On admet la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Une manière de voir cette limite est qu'elle est égale au nombre dérivé de la fonction sinus en 0, donc $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

▶ **Exercices :** 31,32p85

▶ **Exercices :** 88,90p88

IV. Inéquations trigonométriques

⊛ **Activité :** 4p77 (deux méthodes de résolution : avec la courbe ou avec le cercle)

▶ **Exercices :** 93,94p88

▶ **Exercices :** 99,100p89

▶ **Exercices :** 107,108,109,110p89 (étude de fonctions)

V. Utilisation de la notation exponentielle

Nous avons défini, dans le chapitre des nombres complexe, pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. On a alors :

Propriété Pour tout réel θ :

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Puis :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La notation exponentielle et les formules qui lui sont applicables permettent de démontrer les formules suivantes :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$$

$$\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$$

Qui impliquent :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$