

# Logique

## 1. Proposition

**Définition** Grossièrement, une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Cependant, le fait que la proposition soit vraie ou fausse peut dépendre du contexte.

**Exercice 1** Pour chaque cas suivant, dire si la proposition est toujours vraie, toujours fausse, ou si cela dépend du contexte.

1. Quelque soit le nombre réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$ .
2. Le triangle  $ABC$  est rectangle  $A$ .
3. 21 est divisible par 6.
4.  $x + 5 = 15$ .
5. Il y a davantage de droitiers que de gauchers.
6.  $2x + 5 = 2(x - 2)$ .

## 2. Négation

**Définition** À partir d'une proposition  $P$ , on peut énoncer une autre proposition, notée « non  $P$  », qui est la négation de  $P$ . Par exemple, la négation de « le tableau est vert » est la proposition « le tableau n'est pas vert ». Si l'une des deux propositions «  $P$  » ou « non  $P$  » est vraie, alors l'autre est fausse.

**Exercice 2** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Écrire la négation des propositions suivantes, si possible de deux manières différentes, en évitant les ambiguïtés.

1. « La carte est un pique ».
2. « La carte est le 10 de cœur ».
3. « La carte est une dame ou un carreau ».
4. « La carte n'est pas un valet ou est un trèfle ».

**Exercice 3** Écrire la négation des propositions suivantes puis indiquer les propositions vraies.

1. « Un carré est un rectangle particulier ».
2. « Il existe un nombre réel  $x$  tel que  $x^2 > 4$  » (trouver deux manières d'énoncer la négation).
3. « Toutes les personnes présentes dans la classe sont des filles » (même chose).
4. « Deux droites de l'espace sont soit parallèles, soit sécantes ».

## 3. Implication, équivalence

**Définition** Soit  $A$  et  $B$  deux propositions. On dit que  $A$  implique  $B$  si, dès que  $A$  est vraie,  $B$  l'est aussi. On peut alors noter  $A \Rightarrow B$ .

Dans le cas où  $A$  implique  $B$  et  $B$  implique  $A$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes, et on note  $A \Leftrightarrow B$ .

**Exercice 4** Dans chaque cas suivant on donne deux propositions  $A$  et  $B$ . Indiquer si  $A$  implique  $B$  ( $A \Rightarrow B$ ), si  $B$  implique  $A$  ( $B \Rightarrow A$ ) ou si  $A$  et  $B$  sont équivalentes ( $A \Leftrightarrow B$ ).

1.  $A$  : «  $ABCD$  est un trapèze » et  $B$  : «  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles ».
2.  $A$  : «  $2x + 1 \geq 0$  » et  $B$  : «  $2x > 1$  ».
3.  $A$  : «  $x \geq 4$  » et  $B$  : «  $x$  est positif ».
4.  $A$  : «  $2x + 3 = 5$  » et  $B$  : «  $2x = 2$  ».

Beaucoup de propriétés géométriques du collège sont des équivalences. Par exemple : « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si il a un angle droit ». L'expression « si et seulement si » exprime cette équivalence. On a en effet :

- Un parallélogramme est un rectangle si il a un angle droit, ce qu'il faut comprendre comme : « Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle » ; avoir un angle droit est une condition suffisante.
- Un parallélogramme est un rectangle seulement si il a un angle droit, ce qu'il faut comprendre comme : « Si un parallélogramme est un rectangle, alors il a un angle droit » ; avoir un angle droit est une condition nécessaire.

Dans une démonstration, on utilise le plus souvent seulement l'une des implications. Il ne faut alors pas se tromper dans sa rédaction.

### Exercice 5 (La bonne rédaction)

- On souhaite démontrer que  $ABCD$  est un parallélogramme. Toutes les phrases suivantes sont-elles un bon début ?
  - $ABCD$  est un parallélogramme si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
  - Si  $ABCD$  est un parallélogramme, alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .
  - Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , alors  $ABCD$  est un parallélogramme.
- À l'image de la question précédente, donner des manières de démontrer que :
  - le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle.
  - Le point  $M$  n'appartient pas à la médiatrice du segment  $[AB]$ .

## 4. Le cas des équations

Comme on a pu l'observer plus haut, une équation est une proposition (l'égalité est vraie ou fausse). Résoudre une équation d'inconnue  $x$ , c'est déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  qui rendent vraie cette proposition. Pour cela on passe d'une équation à l'autre en faisant des opérations **réversibles**, ce qui permet de conserver l'équivalence entre les équations.

**Exercice 6** Dans la suite d'équations suivantes, indiquer l'opération effectuée entre chaque implication.

$$2x + 4 = 8 \quad \xLeftrightarrow{\quad} \quad 2x = 4 \quad \xLeftrightarrow{\quad} \quad x = 2$$

On note alors plus simplement :

$$\begin{aligned} 2x + 4 = 8 &\Leftrightarrow 2x = 4 \quad (-4) \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad (\div 2) \end{aligned}$$

Autrement dit, on raisonne le plus souvent avec les implications allant de l'équation de départ (ici  $2x + 4 = 8$ ) vers le résultat final (ici  $x = 2$ ). Celles-ci permettent de dire que : Si  $x$  est solution de  $2x + 4 = 8$ , alors \_\_\_\_\_

Cependant, ce que les implications réciproques nous permettent d'affirmer c'est que : Si  $x = 2$ , alors \_\_\_\_\_

Par suite on est certain d'avoir trouvé toutes les solutions, et seulement les solutions. On donne alors :  $\mathcal{S} = \{2\}$ .

Parfois c'est un peu plus compliqué...

**Exercice 7** Résoudre, en utilisant le symbole d'équivalence, les équations suivantes :

- $5x + 7 = 3x - 2$
- $(2x + 7)(2x - 3) = 0$

Cette manière de rédiger est demandée aux élèves de série S. Commencez dès maintenant à l'utiliser !

## 5. Contraposée, réciproque

### Rappel (et exercice)

Soit  $P$  une proposition écrite sous la forme « Si  $A$  alors  $B$  » (où  $A$  et  $B$  sont des propositions).

- La **contraposée** de  $P$  est : « Si ..... alors ..... ».
- La **réciproque** de  $P$  est : « Si ..... alors ..... ».

Si la proposition est vraie, alors la ..... est nécessairement vraie ;  
cependant, la ..... n'est pas nécessairement vraie.

**Exercice 8** Pour chacune des propositions suivantes (de géométrie dans l'espace),

- écrire sa contraposée et sa réciproque.
- Indiquer ensuite lesquelles parmi la proposition, sa contraposée et sa réciproque sont vraies.

- « Si deux droites sont sécantes, alors elles sont coplanaires ».
- « Si deux droites sont coplanaires, alors elles sont sécantes ».
- « Si deux droites sont parallèles, alors elles sont coplanaires ».
- « Si  $ABCDEFGH$  est un cube, alors  $(AB)$  est parallèle à  $(HG)$  ».
- « Si trois droites sont concourantes, alors elles sont coplanaires ».

**Exercice 9** Donner d'autres exemples de propositions dans le domaine de la géométrie, d'autres domaines des mathématiques, ou même de la vie courante, qui sont de la forme « Si  $A$  alors  $B$  ». En chercher :

- qui sont fausses mais dont la réciproque est vraie ;
- qui sont vraies mais dont la réciproque est fausse ;
- qui sont vraies et dont la réciproque est vraie.