Chapitre : Fonctions

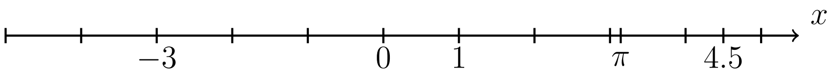
∽

I. Généralités

1. Intervalles

<u>Définition</u> L'ensemble de tous les nombres (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels) est appelé ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

On le représente souvent à l'aide d'une droite graduée.

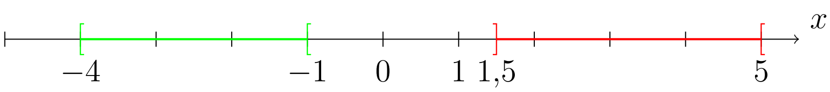


<u>Définition</u> Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux valeurs, un nombre ou l'infini (∞), que l'on appelle les bornes de l'intervalle, et deux crochets.
Soit a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $]a;b[$ est un intervalle **ouvert**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus).
- L'intervalle $[a;b]$ est un intervalle **fermé**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b sont inclus).
- On définit de manière similaire des intervalles comme $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant b$.

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclu** de l'intervalle.

⚠ L'infini est toujours exclu : ce n'est pas un nombre réel, un nombre réel ne vaut jamais l'infini.



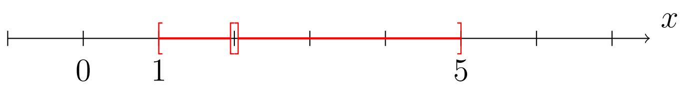
Représentation des intervalles
$[-4;-1[$ (semi-ouvert) et $]1{,}5;5[$ (ouvert).
On a $\pi \in]1{,}5;5[$ car $1{,}5 < \pi < 5$, $-4 \in [-4;-1[$ mais $-1 \notin [-4;-1[$.

Voir page 27

▶ **Exercices :** 1,2,3,4p27

<u>Définition</u> L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui sont au moins dans l'un des deux intervalles. On utilise la notation $\cup$ pour faire l'union de deux intervalles, on la prononce « union ».

Exemple $[1;2[\cup]2;5]$ est l'ensemble des nombres x tels que $1 \leqslant x \leqslant 5$ et $x \neq 2$.



2. Fonctions

a. Vocabulaire

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.
On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, on le note parfois $\mathcal{D}_f$.
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x. Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x, appelée variable). Soit par exemple f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

▶ **Exercices :** 9,10,11p29

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Remarque Un antécédent est un « x » (alors que l'image est un « y » ou « f(x) »).

Méthode Chercher un antécédent revient à chercher un « x », et par suite à résoudre une équation.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Chercher un antécédent de 4 par f c'est chercher les nombres x tels que $f(x) = 4$. On remplace $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation.
On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4.
Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geqslant 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

▶ **Exercices :** 15,16p31

b. Représentation graphique

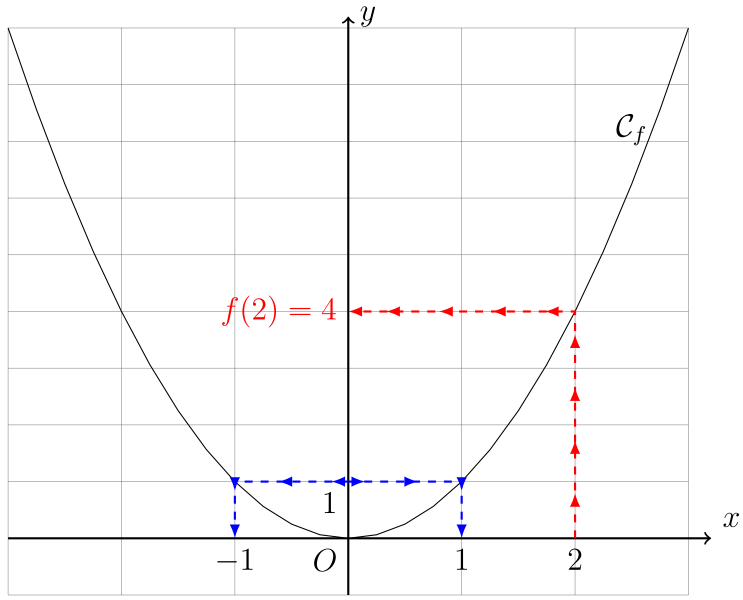
Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La représentation graphique de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Pour construire une représentation graphique d'une fonction f, il faut calculer l'image $f(x)$ de plusieurs nombres x de $\mathcal{D}$.

Exemple Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3;3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Exemple de calcul : $f(-3) = (-3)^2 = 9$.
Représentation et lectures graphiques :



2 a pour image 4 par f : $f(2) = 4$.
1 a pour antécédents -1 et -1 par f : $f(-1) = f(1) = 1$.

Une lecture graphique des images (et des antécédents) ne donne que des valeurs approchées.

▶ **Exercices :** 6,7,8p28-29 (images)

▶ **Exercices :** 14,17,19p31 (antécédents)

▶ **Exercices :** 70,71p45 (détermination de points sur une courbe)

▶ **Exercice :** 72p45 (tracé de courbe avec la calculatrice) : voir page 270 ou 272 selon le modèle.

▶ **Exercice :** 63p44 (ensemble de définition)

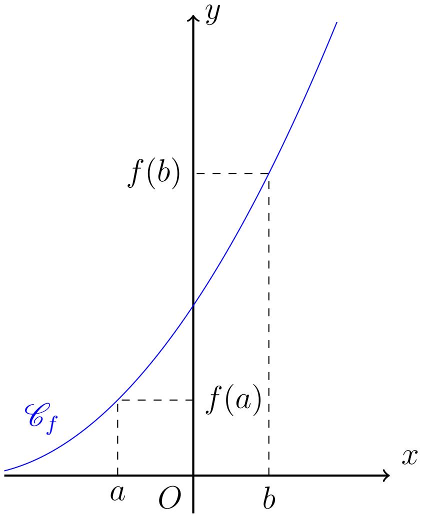
★ **Approfondissement :** 66 (logique), 67 (problème) p44

II. Variations de fonctions

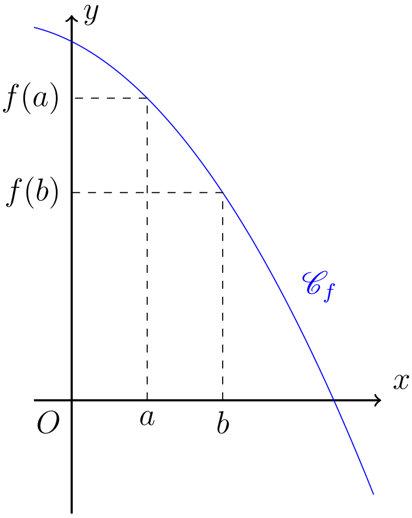
⊛ **Activité :** 1p23

<u>**Définition**</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité, alors qu'une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.



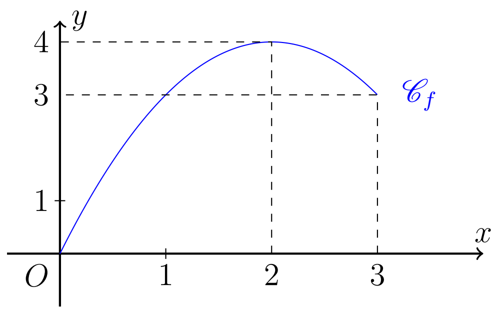
Fonction croissante
$a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$



Fonction décroissante
$a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont toujours strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).
On peut indiquer les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante à l'aide d'un tableau de variations.

x	0		2		3
variations de f	0	↗	4	↘	3



▶ **Exercices :** 26,27,28,29p35

▶ **Exercices :** 31,32p36
On observe alors sur la courbe ou le tableau des valeurs remarquables qui peuvent correspondre à des maximums (ou maxima) ou à des minimums (ou minima).
Un extremum (maximum ou minimum) est une valeur atteinte par la fonction. Ainsi

__**Définition**__ $f(a)$ est un maximum (resp. minimum) de f sur I si $f(a)$ est la plus grande (resp. petite) valeur de f sur I, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

__**Exemple**__ valeurs maximales de l'exemple précédent.

▶ **Exercices :** 34,35,36,37p38

▶ **Exercices :** 41,42p39 (retour à la définition générale de variation)

III. Fonctions de référence

1. Fonctions affines et linéaires

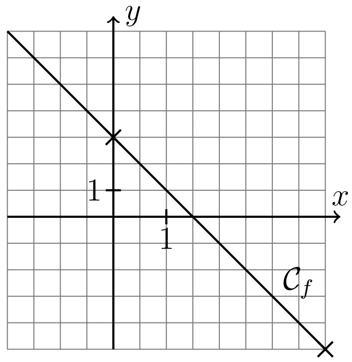
⊛ **Activité :** page 52

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire** ($f(x) = ax$).
Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante** ($f(x) = b$).

Propriété La fonction affine f est représentée par une droite.
On note que la droite a pour équation $y = ax + b$

Exemple Soit $f : x \longmapsto -2x + 3$.
Pour tracer la courbe représentative de f, qui est une droite puisque f est une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de cette droite.
Pour cela, on choisit deux valeurs de x, puis on détermine les images $y = f(x)$. Par exemple :
Si $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc on obtient le point de coordonnées $(0; 3)$.
Si $x = 4$, on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$, on obtient donc le point de coordonnées $(4; -5)$.
On place alors les deux points dans un repère, puis la droite passant par ces deux points.



Définition Le nombre a est appelé **coefficient directeur**.
Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

Propriété Soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors quels que soient u et v distincts dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$$

Démonstration : On exprime la différence : $f(v) - f(u) = (av + b) - (au + b) = av + b - au - b = au - av = a(v - u)$. Comme u et v sont distincts, $v - u \neq 0$. On peut donc diviser par $(v - u)$, ce qui donne bien : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$ □

L'expression $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$ est appelée taux de variation de f entre u et v. Ce taux est donc toujours le même pour une fonction affine, égale au coefficient directeur.

Ceci n'est vrai que pour une fonction affine.

Le terme de « coefficient directeur » n'a de sens que pour une fonction affine (en fait plus rigoureusement pour une droite).

Propriété Soit $f : x \longmapsto ax+b$.
- Si $a>0$, alors f est croissante.
- Si $a<0$, alors f est décroissante.

Démonstration : Dans le cas où $a>0$:
Soit u et v deux réels tels que $u<v$. Pour prouver que f est croissante, il suffit de prouver que $f(u)<f(v)$ (voir la définition vue en début d'année).
Or $f(u)<f(v) \Leftrightarrow f(u)-f(v)<0$.
Calculons alors : $f(u)-f(v)=(au+b)-(av+b)=au+b-av-b=au-av=a(u-v)$
Or, comme $u<v$, on a $u-v<0$. On a supposé de plus que $a>0$. Par conséquent, le produit $a(u-v)$ est négatif d'après la règle des signes d'un produit.
Autrement dit, $f(u)-f(v)<0$: f est bien croissante.
Pour le cas où $a<0$: la Démonstration est tout à fait similaire sauf qu'il faut prouver cette fois que $f(u)>f(v)$ (une fonction décroissante change le sens de l'inégalité). Cette fois, $a(u-v)$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs. □

Exemple Soit $g : x \longmapsto \dfrac{-2x+5}{4}$.
La fonction g est affine. En effet, $g(x)=\dfrac{-2}{4}x+\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$.
Le coefficient directeur est $a=-\dfrac{1}{2}$, donc négatif. Ainsi, g est décroissante.

▶ **Exercices :** 22,23p61 (simplification puis représentation)

▶ **Exercices :** 48,49p62 (variations)

▶ **Exercices :** 6,9p56 (signe d'une expression affine)

▶ **Exercices :** 44,45p62 (représentation et inéquations)

▶ **Exercices :** (?) 1,3p55 (inéquations algébriquement et graphiquement)

▶ **Exercices :** 28 (à résoudre ensemble),30,31p61 (déterminer $f(x)$ connaissant deux images)

▶ **Exercice :** 43p62 (interprétation graphique de a ; chercher graphiquement $f(x)=ax+b$)

▶ **Exercice :** en DM : *équation de droites, droites parallèles ou sécantes ; appartenance d'un point à une droite ; intersection de deux droites.*

2. Fonction carré

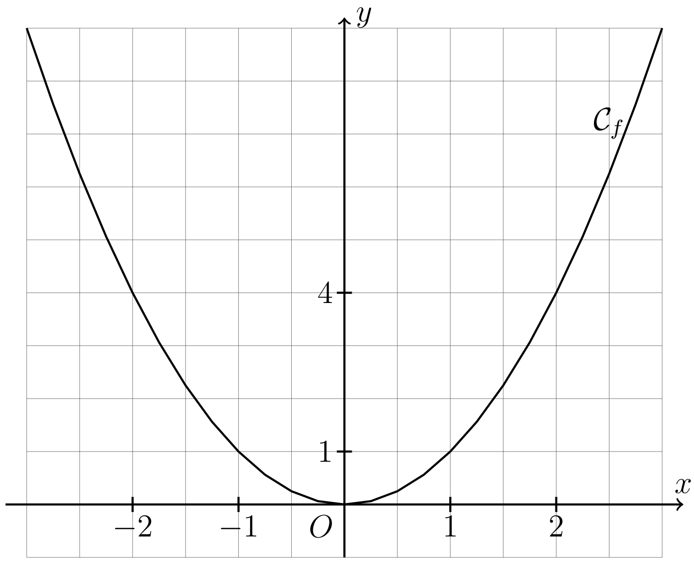
⊛ **Activité :** page 66 (manipulation d'expressions avec le carré)

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Démonstration : Prouvons que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Soit donc a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On a $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or, $a - b < 0$ (car $a < b$) et $(a + b) > 0$ (car a et b sont positifs). Donc $a^2 - b^2 < 0$, c'est à dire $a^2 < b^2$. Ainsi la fonction carré respecte l'ordre sur $[0; +\infty[$, autrement dit elle est croissante sur $[0; +\infty[$.
Sur $]-\infty; 0]$: exercice □

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que $f(-x) = f(x)$, autrement dit les points $(-x; x^2)$ et $(x; x^2)$ qui sont sur la courbe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

▶ **Exercices :** 17,18,19,20p72 (comparaison de carrés)

▶ **Exercices :** 23,27p73 (comparaisons un peu plus poussées)

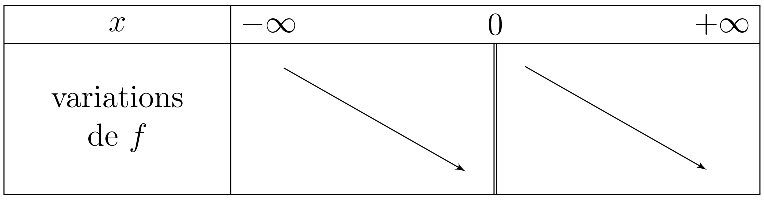
▶ **Exercices :** 29,30p74 (résolution graphique d'inéquations avec les carrés)

3. Fonction inverse

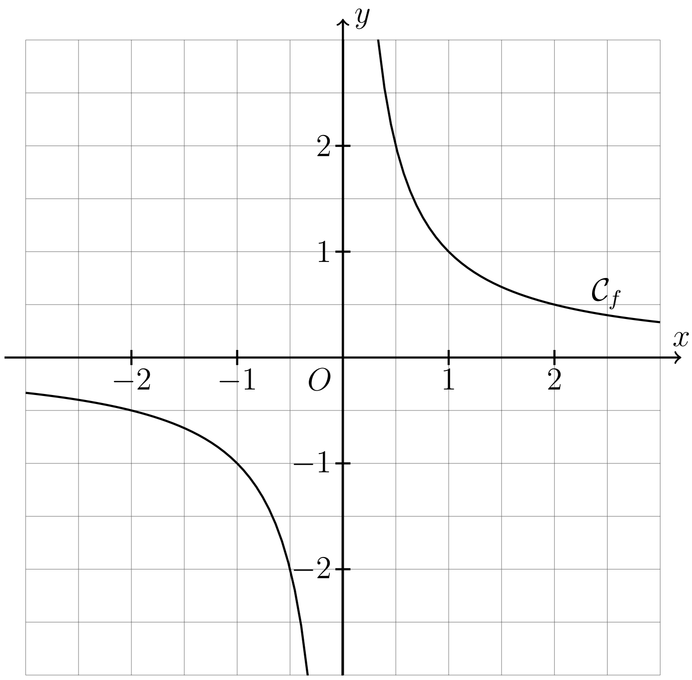
Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et encore décroissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : Exercice. □



x	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\dfrac{1}{2}$



Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, $f(-x)=-f(x)$, donc les points $\left(-x;-\dfrac{1}{x}\right)$ et $\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$ sont sur la courbe et sont symétriques par rapport à O.

▶ **Exercice :** 1p91

▶ **Exercices :** 5,6p95 (comparaisons)

▶ **Exercices :** 9,10p96 (encadrements)

▶ **Exercices :** 15,16,17p97 (résolutions graphiques d'inéquations)

★ **Approfondissement :** 52p104 (trois fonctions)

IV. Fonctions polynomiales de degré 2

1. Définition, variations

⊛ **Activité :** 1p67 (trajectoire d'un objet lancé, parabole sur calculatrice)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme :

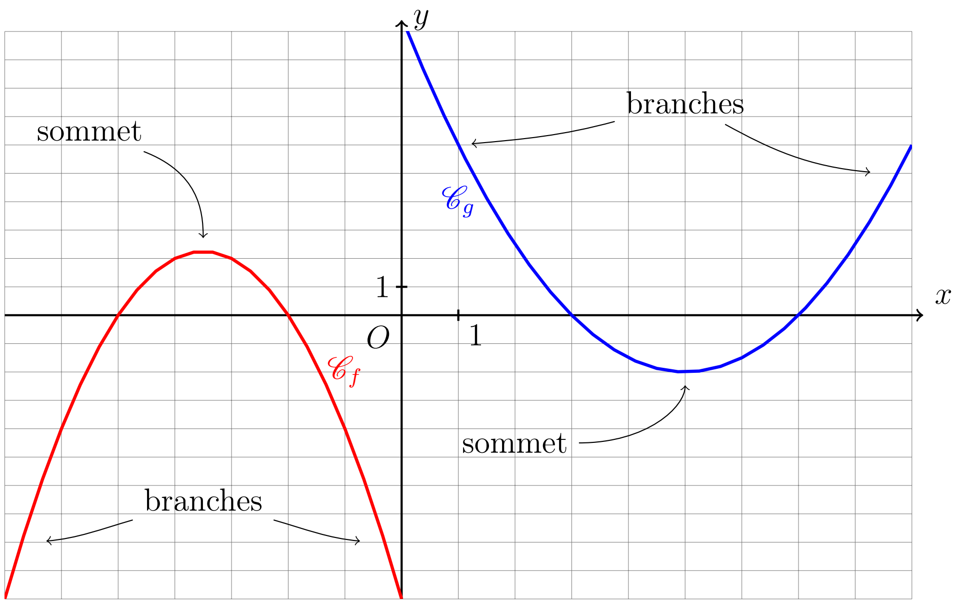
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres fixés, a étant non nul.

Exemple $f(x) = -(x+5)(x+2) = (-x-5)(x+2) = -x^2 - 2x - 5x - 10 = -x^2 - 7x - 10$;
$g(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x-7) = \frac{1}{2}(x^2 - 7x - 3x + 21) = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 21) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{21}{2}$.

Exemple la fonction carré est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition De même que la fonction carré, la courbe représentative d'une fonction poynomiale de degré 2 est appelée **parabole**, formée de deux **branches** et d'un sommet.



Propriété

— Si $a > 0$, les branches de la parabole sont vers le haut.
— Si $a < 0$, les branches de la parabole sont vers le bas.

Le sommet de la parabole est atteint pour $x = \frac{-b}{2a}$.

Démonstration : Ceci est admis et ne sera démontré qu'en première. □

Exemple On peut établir le tableau de variations de f :
$a = -1 < 0$ donc les branches sont dirigées vers le bas.
Le sommet est atteint en $-\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \times (-1)} = -\frac{7}{2}$.

Par suite, $f\left(-\frac{7}{2}\right) = \dots = \frac{9}{4}$.
Ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	

De même pour g :
$a = \frac{1}{2} > 0$ donc les branches sont dirigées vers le haut.
Le sommet est atteint en $-\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \times \frac{1}{2}} = 5$.
Par suite, $g(5) = \dots = -2$ (utiliser la forme factorisée).
Ainsi :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
variations de g		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

On peut observer une symétrie de la courbe par rapport à la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet.

▶ **Exercices :** 39 à 42p77

▶ **Exercices :** 84,85,86p83

2. Problèmes du second degré

a. Développer, factoriser

Rappel
- Développer, c'est transformer un produit en somme ;
- Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Méthode Pour développer ou factoriser on peut utiliser (a, b, c et k désignent des nombres réels) :
- la distributivité de la multiplication sur l'addition : $k(a+b) = ka + kb$
- les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

▶ **Exercices :** 1,2,5,6p70 (développer)

▶ **Exercices :** 8,11,12p71 (factoriser)

b. Équations produit

Propriété **(Règle du produit nul)**
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autrement dit : Soient A et B deux réels. $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

▶ **Exercices :** première question de chaque exercice suivant : 35,36,37,38p76

c. Signe d'un produit

Méthode

- Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chacun des facteurs.
- Pour étudier le signe d'une expression affine, on peut résoudre une inéquation

Exemple Étudions le signe de $(x-3)(-2x+4)$ sur $\mathbb{R}$.
On résout : $x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ et $-2x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{-4}{-2}$ $(-2 < 0)$ $\Leftrightarrow x \leqslant 2$.
Par suite :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors résoudre des inéquations comme : $(x-3)(-2x+4) \geqslant 0$.
D'après le tableau de signes, on peut affirmer que $\mathcal{S} = [2;3]$.

▶ **Exercices :** deuxième question de chaque exercice suivant : 35,36,37,38p76

V. Fonctions homographiques

1. Définitions

⊛ **Activité :** 2p91 (recherche d'une longueur revenant à étudier des fonctions homographiques)

Définition On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c et d sont des constantes, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarque la seconde condition revient à dire que le numérateur n'est pas proportionnel au dénominateur (et donc que $f(x)$ ne peut pas être simplifiée en une constante).

Exemple $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$; $g(x) = \dfrac{4-x}{x}$

Exemple la fonction inverse est une fonction homographique.

Propriété La fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$.

Démonstration : Il faut en effet que $cx + d \neq 0$, donc que $x \neq -\dfrac{d}{c}$. □

Exemple Donner l'ensemble de définition de f et de g.

Définition De même que pour la fonction inverse, la courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

Les variations d'une telle fonction ne sont, en seconde, pas à connaître.

▶ **Exercices :** 18,19,21p98

▶ **Exercice :** 55p104

2. Applications

a. Équations quotient

Propriété (Règle du quotient nul)
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (et son dénominateur est non nul).
Autrement dit : Soient A et B deux réels. $\dfrac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$ (et $B \neq 0$).

Exemple Résoudre l'équation $\dfrac{12-5x}{7+2x} = 0$

▶ **Exercice :** 18p98

b. Signe d'un quotient et inéquations

Méthode Le signe d'un quotient s'étudie de la même manière que celui d'un produit.

Exemple Résoudre $\dfrac{2}{x-1} < 4$ (se ramener à une inéquation du type $\dfrac{a}{b} < 0$).

▶ **Exercices :** 22,25,26p99