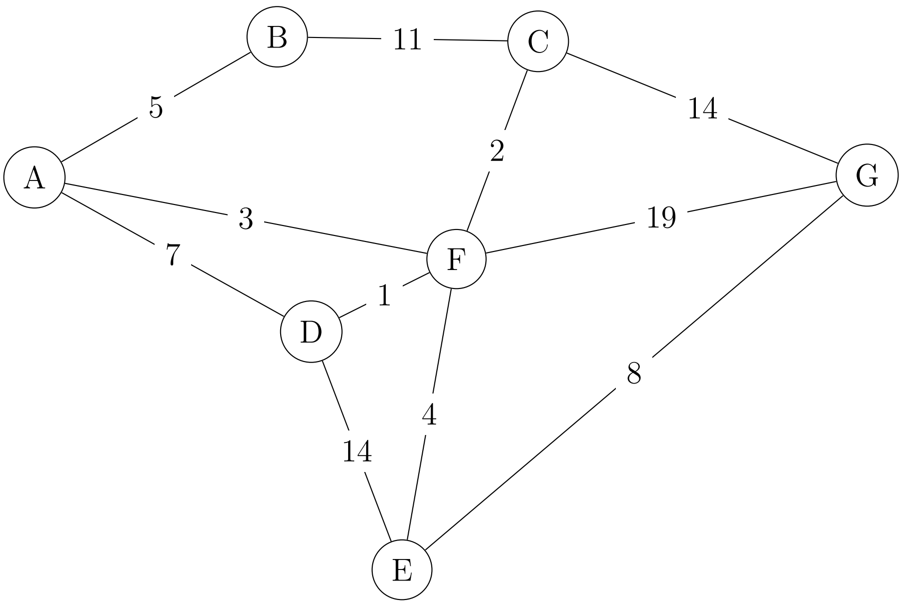
Exercice 2 (5 points – Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)
Dans le jeu vidéo « Save the princess », l'objectif est d'aller délivrer une princesse tout en récoltant des trésors situés dans les couloirs du château.
Le plan du château est représenté par le graphe pondéré ci-dessous. Les sommets de ce graphe représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs reliant les salles entre elles.



Partie A

1. Le joueur se trouve dans la salle A. Il décide de visiter chacun des couloirs afin de trouver le plus de trésors possibles. Peut-il trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois ? Justifier la réponse.
2. Dans chaque couloir se trouve un certain nombre de monstres. Les étiquettes du graphe pondéré donnent le nombre de monstres présents dans les couloirs.

   Le joueur souhaite, en partant de A, rejoindre la princesse enfermée dans la salle G. Déterminer le chemin qu'il doit prendre pour délivrer la princesse en combattant le moins de monstres possible.

   Combien de monstres aurait-il alors à affronter ?

Partie B
Pour un joueur régulier, on estime que :

- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,7 ;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0,6.

On note $P_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste lors de la n-ième partie où u_n désigne la probabilité que la partie soit gagnée et v_n celle que la partie soit perdue.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On nommera les sommets U (pour la partie gagnée) et V (pour la partie perdue).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre U, V.
3. On suppose la première partie perdue ; l'état probabiliste initial est donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer la probabilité que le joueur gagne la 15$^{\text{e}}$ partie.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

   Calculer le produit $P \times M$ en détaillant. Que déduire concrètement du résultat obtenu ?