Correction de l'exercice du bac blanc

Exercice 4
Partie A

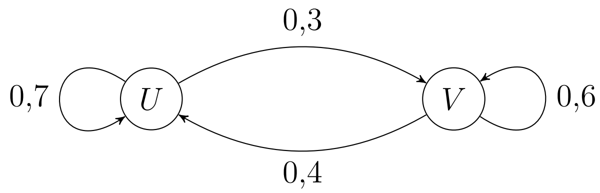
1. Trouver un trajet lui permettant de passer par tous les couloirs une et une seule fois c'est vouloir parcourir le graphe en passant une fois et une seule par chaque arête, autrement dit c'est déterminer un cycle eulérien (on part d'un sommet et on arrive au même sommet) ou une chaîne eulérienne (on part d'un sommet et on arrive à un autre).
   D'après le théorème d'Euler, un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs, et un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degrés pairs, sauf deux ; la chaîne eulérienne part alors d'un des deux sommets de degré impair pour aboutir à l'autre.
   Le graphe proposé a cinq sommets de degré impair : A, C, D, E et G. Il n'admet donc ni cycle ni chemin eulérien ; donc le joueur ne peut pas trouver un trajet permettant de passer par tous les couloirs une fois et une seule.
2. On applique l'algorithme de Moore-Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\vert$	5(A)	∞	7(A)	∞	3(A)	∞
$\vert$	5(A)	5(F)	4(F)	7(F)	$\vert$	22(F)
$\vert$	5(A)	5(F)	$\vert$	~~18(D)~~ 7(F)	$\vert$	22(F)
$\vert$	$\vert$	~~16(B)~~ 5(F)	$\vert$	7(F)	$\vert$	22(F)
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	7(F)	$\vert$	19(C)
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	15(E)

   Le chemin le plus court est : $\text{A} \xrightarrow{3} \text{F} \xrightarrow{4} \text{E} \xrightarrow{8} \text{G}$
   Le joueur aura à affronter $3 + 4 + 8 = 15$ monstres.

Partie B

1. Le graphe est le suivant :



2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.
3. La matrice de transition M vérifie, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.
   Donc $P_{15} = P_1 \times M^{14} = \begin{pmatrix} 0{,}57 & 0{,}43 \end{pmatrix}$.
   Donc la probabilité que le joueur gagne la 15$^{\text{e}}$ partie est 0,57.
4. On a :

$$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \times 0{,}7 + \frac{3}{7} \times 0{,}4 & \frac{4}{7} \times 0{,}3 + \frac{3}{7} \times 0{,}6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2{,}8 + 1{,}2}{7} & \frac{1{,}2 + 1{,}8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = P$$

   On en déduit que P est l'état stable, donc qu'au bout de plusieurs parties, la probabilité que le joueur gagne chaque partie sera d'environ $\frac{4}{7}$.