Exercice 2 (Correction)

1. On détermine tout d'abord le tableau des degrés des sommets du graphe :

sommets	1	2	3	4	5
degré	3	4	2	2	3

Comme il y a exactement deux sommets de degré impair 1 et 5, il y a une chaîne eulérienne qui commence et finit par chacun de ces deux sommets, et comme la somme des degrés est 14, il y a 7 arêtes.

1–2–4–1–5–3–2–5 est un tel itinéraire complet d'accrobranches, empruntant une fois et une seule chaque parcours et commençant par l'arbre numéro 1.

2. (a) La matrice M est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On utilise la matrice M^3, et son coefficient situé en première ligne quatrième colonne. C'est 5 ; c'est le nombre d'« itinéraires express » qui débutent à l'arbre numéro 1, empruntent trois parcours d'accrobranches et finissent à l'arbre 4.

3. (a) On sait que $K(20\ ;\ 0)$ est sur la courbe $\mathcal{C}$ donc $f(x_K) = y_K$ donc $f(20) = 0$.
Or $f(20) = a \times 20^2 + b \times 20 + c$ donc $400a + 20b + c = 0$, c'est la première ligne du système.
On sait que $J(10\ ;\ 2{,}5)$ est sur la courbe $\mathcal{C}$ donc $f(x_J) = y_J$ donc $f(10) = 2{,}5$.
Or $f(10) = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ donc $100a + 10b + c = 0$, c'est la deuxième ligne du système.
On sait que $I(2\ ;\ 8{,}1)$ est sur la courbe $\mathcal{C}$ donc $f(x_I) = y_I$ donc $f(2) = 8{,}1$.
Or $f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c$ donc $4a + 2b + c = 0$, c'est la troisième ligne du système.

(b) Prenons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 8{,}1 \end{pmatrix}$ alors le système précédent est équivalent à

$$UX = Y \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La calculatrice nous permet de savoir que U^{-1} existe.
On sait qu'alors : $UX = Y \Leftrightarrow X = U^{-1}Y$.
On trouve à la calculatrice que

$$U^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $a = \dfrac{1}{40}, b = -1$ et $c = 10$.